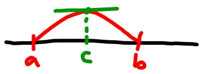
I dag: Baklengs repetisjon del 3

$\boxed{\text{Derivasjonsteori forts.}}$

Anta at $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er deriverbar.

Rolles teorem: Hvis $f(a) = f(b) = 0$, så fins $c \in (a,b)$ slik at $f'(c) = 0$.



Middelverdisetningen: Det fins $c \in (a,b)$ slik at

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Eks. La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en tre ganger deriverbar funksjon, og la $a < b$ være reelle tall. Vis at hvis

$$f''(a) = f''(b)$$

så fins $x \in (a,b)$ slik at $f'''(x) = 0$.

Løsn. Vi tar $f''(x)$ som vår funksjon i middelverdisetningen:

$$\frac{f''(b) - f''(a)}{b - a} = f'''(c) \quad \text{for en } c \in (a,b)$$

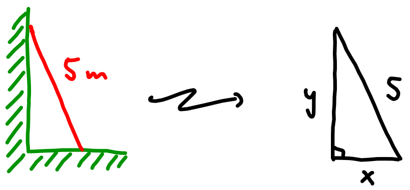
Siden $f''(b) = f''(a)$, er telleren på venstre side lik 0.

Alltså fins $c \in (a,b)$ slik at $f'''(c) = 0$. Ta $x = c$.

Koblede hastigheter (implisitt derivasjon)

Eks. En stige med lengde 5 m sklir ned veggen. Når toppen er 3 m over bakken, sklir den nedover med fart 2 m/s.
Hvor fort beveger bunnen av stigen seg bort fra veggen da?

Løsn.



Sklir ned: $x = x(t)$
$y = y(t)$

$x^2 + y^2 = 5^2$ (Pyt.)

Så $[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 25$

Deriverer likningen med hensyn på t:

$$\cancel{2} \cdot x(t) \cdot x'(t) + \cancel{2} \cdot y(t) \cdot y'(t) = 0$$

Vårt tidspunkt: $y(t) = 3$, $y'(t) = -2$. I tillegg gir Pytagoras

$$[x(t)]^2 + 3^2 = 5^2 \quad , \quad \text{dvs. } x(t) = 4$$

Innsatt:

$$4 \cdot x'(t) + 3 \cdot (-2) = 0$$
$$4 \cdot x'(t) = 6$$
$$x'(t) = \frac{3}{2} \quad (\text{m/s})$$

Bunnen beveger seg bortover med fart $\frac{3}{2}$ meter/sek.

$\boxed{\text{Logaritmisk derivasjon}}$

Bruker regnereglene $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ og $\ln(a^b) = b \cdot \ln a$

Eks. $f(x) = \sin^{17} x \cdot \cos^2 x \cdot a^x \cdot x \cdot \ln x$ gir

$$\ln f(x) = \ln(\sin^{17} x) + \ln(\cos^2 x) + \ln(a^x) + \ln x + \ln(\ln x)$$
$$= 17 \ln(\sin x) + 2 \ln(\cos x) + x \ln a + \ln x + \ln(\ln x)$$

Deriverer på begge sider ("implisitt derivasjon")

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = 17 \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + 2 \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) + \ln a + \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$$

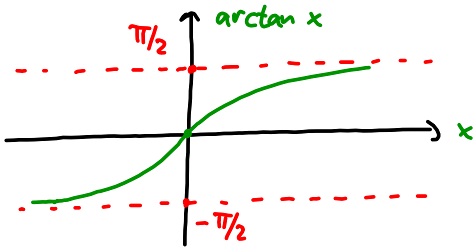
Gang så opp $f(x)$.

$\boxed{\text{Omvendte funksjoner}}$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$



Disse kan utledes fra formelen for den deriverte av omvendte funksjoner:

$$\boxed{(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}} \quad (*)$$

Utledning av denne: $f^{-1}(f(x)) = x$, deriverer: $(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1.$

Dette gir: (setter $f(x) = \sin x$ i $*$)

$$(\sin^{-1})'(\sin x) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$$

Omdøping gir $$(\sin^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

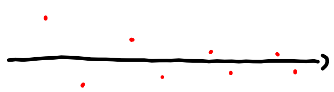
Følger

Eks. Finn et eksempel på en følge som verken er voksende eller avtakende, men som likevel konvergerer.

Løsn. Husk: Voksende følge: $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \dots$

Strengt voksende følge: $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 \dots$

Ide:



Kan ta følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ som har $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Husk kompletthetsprinsippet for følger:

- Voksende og oppad begrenset $\Rightarrow$ Konv.
- Avtakende og nedad " $\Rightarrow$ Konv.

$\boxed{\text{Komplekse tall}}$

- Merk at det er to ulike betydninger av ordet "røtter"

Fundamentalteoremet : Et komplekst polynom $P(z)$ av grad n kan faktoriseres

$$P(z) = a\,(z - z_1)\cdot(z - z_2)\cdots(z - z_n)$$

der $z_1, \ldots, z_n$ kalles røttene til $P(z)$. (Noen av dem kan være like.)

Hvis $P(z)$ er reelt, altså at alle koeffisientene er reelle tall, så opptrer alle de komplekse røttene i konjugerte par. For eksempel

$$(z - 2i)\cdot(z + 2i)$$

n-te røtter av komplekse tall w : Tall z slik at $z^n = w$.

Husk å tegne figurer.

Avslutningsfasen:

Lørdag 21. november kl. 10 - 14 : Prøveeksamen (her lages også zoom-møte)
kl. 15 - 17 : Gjennomgang her + zoom

Helgen 28. - 29. november : Skal sette opp tidspunkter hvor jeg (Arne) er tilgjengelig via zoom.
Legger ut beskjed om dette på semestersiden.

Mandag 30. november : Eksamen kl. 15 - 19 pluss 30 min opplasting med "digital trøsterunde" som lørdag 21/11.