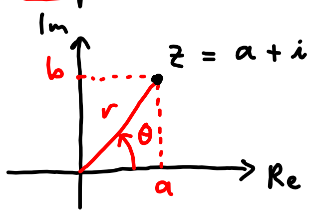
Komplekse tall



$z = a + ib$

$\frac{a}{r} = \cos\theta$ og $\frac{b}{r} = \sin\theta$

Så $a = r\cos\theta$ og $b = r\sin\theta$

$a = \mathrm{Re}(z)$ kalles realdelen til z

$b = \mathrm{Im}(z)$ — " — imaginærdelen til z

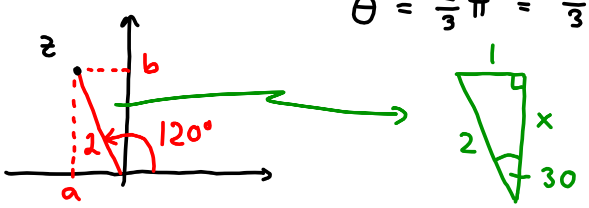
$r = |z|$ kalles modulus eller absoluttverdi til z

θ kalles et argument til z, eller vinkelen til z

a og b kalles de kartesiske eller rektangulære koordinatene til z, mens r og θ kalles polarkoordinatene.

Eks. z har polarkoordinater $r = 2$ og $\theta = \frac{2\pi}{3}$.
Skriv z på formen $a + bi$.

Løsn. $\theta = \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3} \cdot 180^\circ = 120^\circ$



Pyt: $x^2 + 1^2 = 2^2$
$x^2 = 3$
$x = \sqrt{3}$

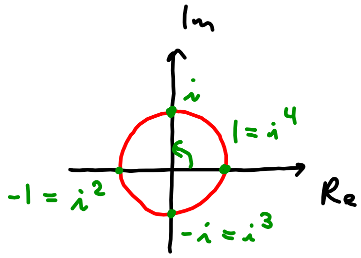
Så $a = -1$, $b = \sqrt{3}$

$z = \underline{\underline{-1 + \sqrt{3}\,i}}$

Alternativt: $a = r\cos\theta = 2 \cdot \cos\frac{2\pi}{3} =$ osv.
$b = r\sin\theta = 2 \cdot \sin\frac{2\pi}{3} =$ osv.

Eks. Finn i^3, i^4 og i^5

Løsn.
$$i^3 = i \cdot i^2 = i \cdot (-1) = -i$$
$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$$
$$i^5 = i \cdot i^4 = i \cdot 1 = i$$



Kompleks eksponentialfunksjon

Fra reell analyse (se Kalkulus s. 754) har vi rekkene

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$\boxed{\begin{array}{l} 2! = 2 \cdot 1 \\ 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ \text{osv.} \end{array}}$

Hvis vi setter $x = i\theta$ inn i rekken for e^x, får vi

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots$$

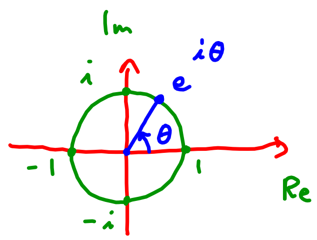
$$= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i \cdot \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)$$

"Antar"
$$= \cos\theta + i \cdot \sin\theta$$

Derfor definerer vi for alle $\theta \in \mathbb{R}$

$$\boxed{e^{i\theta} \overset{\text{def}}{=} \cos\theta + i\sin\theta}$$



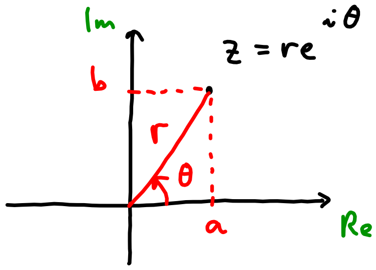
Berømt spesialtilfelle:

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i \cdot \sin\pi = -1 + i \cdot 0 = -1$$

dvs. $\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$ Eulers likning. Berømt!

Kan nå skrive komplekse tall på eksponentiell form

$\boxed{z = re^{i\theta}}$ (kalles også polarform)



$z = re^{i\theta}$

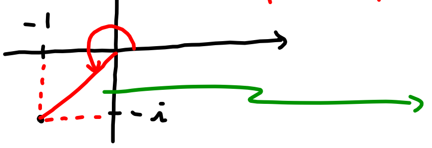
Har: $z = r \cdot (\cos\theta + i \sin\theta)$

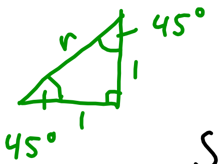
$= \underbrace{(r\cos\theta)}_{a} + \underbrace{(r\sin\theta)}_{b} \cdot i$

Eks. Skriv $z = -1 - i$ på formen $z = re^{i\theta}$

Løsn. $z = (-1) + (-1) \cdot i$

$\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$





$1^2 + 1^2 = r^2$

$r^2 = 2$

$r = \sqrt{2}$

Så $\underline{\underline{z = \sqrt{2}\, e^{i(5\pi/4)}}}$

Divisjon av komplekse tall

På polarform:

$$z = \frac{6e^{i(\pi/4)}}{2e^{i(\pi/3)}} = 3\cdot e^{i(\pi/4)}\cdot e^{-i(\pi/3)}$$

$$\boxed{a^b \cdot a^c = a^{b+c}}$$

$$= 3\cdot e^{i(\pi/4)-i(\pi/3)}$$

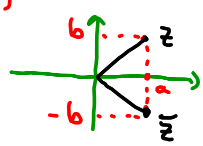
$$= 3\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = 3\cdot e^{i\left(\frac{3\pi}{12}-\frac{4\pi}{12}\right)}$$

$$= \underline{\underline{3\cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}}}$$

På rektangulær form:

$$\frac{5+7i}{3+2i} = \frac{(5+7i)\cdot(3-2i)}{(3+2i)\cdot(3-2i)} = \frac{15-10i+21i+14}{9-\cancel{6i}+\cancel{6i}+4}$$

Triks: Ganger med det konjugerte av nevneren oppe og nede.
Det konjugerte til $z = a+bi$ er $\bar{z} = a-bi$



Speiler punktet om reell akse.

$$= \frac{29+11i}{13} = \underline{\underline{\frac{29}{13}+\frac{11}{13}i}}$$

Finne inverse av komplekse tall

Polarform $z = 3e^{i(\pi/3)}$ gir

$$z^{-1} = \left(3e^{i(\pi/3)}\right)^{-1}$$

$\boxed{(ab)^n = a^n b^n}$

$$\stackrel{\downarrow}{=} 3^{-1}\left(e^{i(\pi/3)}\right)^{-1}$$

$\boxed{(a^b)^c = a^{bc}}$

$$\stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{3} \cdot e^{i(\pi/3)\cdot(-1)} = \underline{\underline{\frac{1}{3} e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}}$$

Rektangulær form:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1 \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \text{etc.}$$ (divisjonstrikset)

Løse likninger med komplekse tall

Eks. 1

$$5z + 3 = iz + 5i$$
$$5z - iz = -3 + 5i$$
$$z \cdot (5 - i) = -3 + 5i$$
$$z = \frac{-3 + 5i}{5 - i} = \text{etc.}$$ (divider)

Eks. 2 Finn z og w slik at

$$\begin{cases} iz + w = -2 & \text{I} \\ z - w = i & \text{II} \end{cases}$$

II sier $z = w + i$

I sier da

$$i(w + i) + w = -2$$
$$iw - 1 + w = -2$$
$$w(1 + i) = -1$$
$$w = \frac{-1}{1 + i} = \underline{\underline{\text{etc.}}}$$