Delvis integrasjon (9.1)

Hvis $F(x)$ og $G(x)$ er funksjoner med kontinuerlige deriverte, så er

$$\int F(x)G'(x)\,dx = F(x)G(x) - \int F'(x)G(x)\,dx$$

Bevis Deriverer begge sider:

$$F(x)\cdot G'(x) = [F(x)\cdot G(x)]' - F'(x)G(x)$$

Dette er produktregelen for derivasjon. Dermed er de to sidene like på en konstant nær. Ubestemte integraler har alltid en ubestemt konstant, så dette kan vi se bort fra. □

eks. 1

$$\int x e^{-x}\,dx = x(-e^{-x}) - \int 1\cdot(-e^{-x})\,dx$$

$$F(x) = x \quad G'(x) = e^{-x}$$
$$F'(x) = 1 \quad G(x) = -e^{-x}$$

$$= -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx$$

$$= \underline{\underline{-xe^{-x} - e^{-x} + C}}$$

eks. 2

$\int x \sin x\,dx \rightsquigarrow$ 1 gangs delvis integrasjon

$\int x^2 \sin x\,dx \rightsquigarrow$ 2 — " — " —

$\int x^n e^x\,dx \rightsquigarrow$ n — " — " —

eks. 3

$$\int \ln x\,dx = \int (\ln x)\cdot 1\,dx = (\ln x)\cdot x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx$$

$$F(x) = \ln x \quad G'(x) = 1$$
$$F'(x) = \frac{1}{x} \quad G(x) = x$$

$$= x\ln x - \int 1\,dx$$

$$= \underline{\underline{x\ln x - x + C}}$$

Sjekk: $\frac{d}{dx}(x\ln x - x + C) = 1\cdot\ln x + \cancel{x\cdot\frac{1}{x}} - \cancel{1} = \ln x$

eks. 4

$$\int \arccos x \, dx = \int (\arccos x) \cdot 1 \, dx$$

$F(x) = \arccos x \qquad G'(x) = 1$

$F'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad G(x) = x$

$$= x \cdot \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

Sub $u = 1 - x^2 \qquad \dfrac{du}{dx} = -2x$

$du = -2x \, dx \;,\; dx = -\dfrac{1}{2x} du$

$$= x \cdot \arccos x + \int \frac{\cancel{x}}{\sqrt{u}} \cdot \left(-\frac{1}{2\cancel{x}}\right) du$$

$$= x \cdot \arccos x - \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} \, du$$

$$= x \cdot \arccos x - \frac{1}{2} \cdot 2 u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

eks. 5 (I - metoden)

$$\overbrace{\int e^x \sin x \, dx}^{I} = -e^x \cos x - \int e^x \cdot (-\cos x) \, dx$$

$F(x) = e^x \qquad G'(x) = \sin x$

$F'(x) = e^x \qquad G(x) = -\cos x$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$$

$F(x) = e^x \qquad G'(x) = \cos x$

$F'(x) = e^x \qquad G(x) = \sin x$

$$= -e^x \cos x + \left[e^x \sin x - \overbrace{\int e^x \sin x \, dx}^{I} \right]$$

Altså : $I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$

$2I = -e^x \cos x + e^x \sin x$

$I = -\frac{1}{2} e^x \cos x + \frac{1}{2} e^x \sin x$

Konklusjon: $\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$

Integrasjon ved substitusjon (9.2)

eks. 1

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan u + C$$

$u = \sin x$ gir $\frac{du}{dx} = \cos x$

$du = \cos x\, dx$

$$= \arctan(\sin x) + C$$

eks. 2

$$\int \sqrt{\frac{\arccos^3 x}{1-x^2}}\,dx = \int \sqrt{\frac{u^3}{\cancel{1-x^2}}}\cdot\left(-\cancel{\sqrt{1-x^2}}\right)du$$

$u = \arccos x$ gir $\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $dx = -\sqrt{1-x^2}\,du$

$$= -\int \sqrt{u^3}\,du$$

$$= -\int (u^3)^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= -\int u^{3/2}\,du = -\frac{2}{5}u^{5/2} + C = -\frac{2}{5}(\arccos x)^{5/2} + C$$

"Baklengs" substitusjon (setning 9.2.3)

Denne begrunner at vi også kan regne slik ved substitusjon:

$u = u(x)$ gir $x = h(u)$ [løser med hensyn på x]

$\frac{dx}{du} = h'(u)$ og $dx = h'(u)\,du$

eks. 1

$$\int \sqrt[3]{x+1}\,dx = \int u\cdot 3u^2\,du = 3\int u^3\,du = 3\cdot\frac{1}{4}u^4 + C$$

$u = \sqrt[3]{x+1}$ gir $u^3 = x+1$

$x = u^3 - 1$

$\frac{dx}{du} = 3u^2$, $dx = 3u^2\,du$

$$= \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^4 + C$$

$$= \frac{3}{4}\left((x+1)^{1/3}\right)^4 + C$$

$$= \frac{3}{4}(x+1)^{4/3} + C$$

eks. 2 $\int e^{\arccos x}\,dx = \int e^{u}(-\sin u)\,du = -\int e^{u}\sin u\,du$

$u = \arccos x$ gir $x = \cos u$

$\frac{dx}{du} = -\sin u$, $dx = -\sin u\,du$

$= \underline{\underline{\text{etc.}}}$ (I-metoden)

eks. 3 $\int \arcsin x\,dx = \int u \cdot \cos u\,du = u\sin u - \int 1\cdot \sin u\,du$

$u = \arcsin x$ gir $x = \sin u$

$\frac{dx}{du} = \cos u$, $dx = \cos u\,du$

$F(u) = u$ $G'(u) = \cos u$

$F'(u) = 1$ $G(u) = \sin u$

$= u\sin u + \cos u + C$

$= \underline{\underline{(\arcsin x)\cdot x + \cos(\arcsin x) + C}}$

$\sqrt{1-x^2}$ (svaret kan forenkles) (Vi dropper)