Delbrøkoppspalting (9.3)

"Kvadrat-teknikken"

Metode for å finne

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$$

der $n \geq 1$ er et helt tall og $ax^2+bx+c=0$ ikke har reelle løsninger

① Bruk "smugling" til å skrive integralet på formen

$$C_1 \cdot \int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx + C_2 \cdot \int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$$

② Venstre integral løses ved substitusjonen $u = ax^2+bx+c$.

③ Høyre integral: Skriv om til formen

$$\int \frac{1}{(1+u^2)^n}\,du$$

ved å utvide til fullstendig kvadrat. Bruk så rekursjonsformelen

$$\int \frac{1}{(1+u^2)^n}\,du = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{u}{(1+u^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{1}{(1+u^2)^{n-1}}\,du$$

(bevis s. 504) inntil du får integralet

$$\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan u + C$$

eks. $\int \frac{x+2}{(x^2+x+1)^2}\,dx$ Sjekk: $x^2+x+1=0$ gir ingen løsninger (ok!)

① $$\int \frac{x+2}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \int \frac{(2x+1)\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{(x^2+x+1)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx$$

② Venstre integral:

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{u^2}\,du = \int u^{-2}\,du$$

$u = x^2+x+1$ $\quad \frac{du}{dx} = 2x+1$

$du = (2x+1)\,dx$

$$= (-1)\cdot u^{-1} + C$$

$$= -\frac{1}{x^2+x+1} + C$$

3 Høyre integral :

$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\cdot\left(\left[\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right]^2+1\right)\right)^2}\,dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} x^2+x+1 &= (x^2+x+\tfrac{1}{4}) + \tfrac{3}{4} \\ &= (x+\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4} \\ &= \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{4}{3}(x+\tfrac{1}{2})^2 + 1\right) \\ &= \tfrac{3}{4}\left(\left[\tfrac{2}{\sqrt{3}}(x+\tfrac{1}{2})\right]^2 + 1\right) \end{aligned}}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\cdot\int \frac{1}{\left(\left[\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right]^2+1\right)^2}\,dx$$

$$\boxed{u = \frac{2}{\sqrt{3}}(x+\tfrac{1}{2}) \text{ gir } \quad \frac{du}{dx} = \frac{2}{\sqrt{3}},\ dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,du}$$

$$= \frac{16}{9}\cdot\int \frac{1}{(u^2+1)^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\,du$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{9}\cdot\int\frac{1}{(u^2+1)^2}\,du$$

$$\boxed{\text{rekursjonsformel med } n=2}$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{9}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{u}{1+u^2} + \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{1+u^2}\,du\right]$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{9}\left[\frac{u}{2(1+u^2)} + \frac{1}{2}\arctan u\right] + C$$

$= $ sett inn $u = \frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})$.

Til slutt: Regn ut hele integralet.

Delbrøkoppspalting kan brukes til å integrere rasjonale funksjoner, dvs. funksjoner på formen

$$\frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{der } p(x) \text{ og } q(x) \text{ er polynomer.}$$

1. Bruk polynomdivisjon til $p(x)$ har lavere grad enn $q(x)$.

2. Faktoriser $q(x)$ i faktorer

$$(x-r)^n \quad \text{og/eller} \quad (ax^2+bx+c)^n$$

der $ax^2+bx+c=0$ ikke har reelle løsningen

3. Hver faktor $(x-r)^n$ gir leddene

$$\frac{a_1}{x-r} + \frac{a_2}{(x-r)^2} + \dots + \frac{a_n}{(x-r)^n}$$

og hver faktor $(ax^2+bx+c)^n$ gir leddene

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Sett $\frac{p(x)}{q(x)}$ lik summen av alle leddene. Gang opp $q(x)$, og finn konstantene. Metoder:

- sette inn lure x-verdier
- sammenlikne koeffisientene (gir likningssystem)

4. Løs integralene.

eks. 1 $\displaystyle\int \frac{3x^2-3x-2}{(x^2-1)\cdot(x-1)}\,dx$

1. Grad $p = 2$, grad $q = 3$, dvs. ok.

2. $x^2-1=0$ gir $x=\pm 1$. Så $x^2-1=(x+1)\cdot(x-1)$.

3. $$\frac{3x^2-3x-2}{(x+1)\cdot(x-1)^2} = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x-1} + \frac{a_3}{(x-1)^2}$$

Ganger opp:

$$3x^2-3x-2 = a_1(x-1)^2 + a_2(x+1)(x-1) + a_3(x+1) \quad (*)$$

Lure x-verdier:

$x=1$ gir $3\cdot1^2-3\cdot1-2 = 0+0+a_3\cdot2$

$-2 = 2a_3$, dvs. $a_3=-1$

$x=-1$ gir $3-3\cdot(-1)-2 = a_1\cdot(-2)^2+0+0$

$4 = 4a_1$, dvs. $a_1 = 1$

Setter vi dette inn i $(*)$ og ganger ut, får vi

$$3x^2-3x-2 = x^2-2x+\cancel{1}+a_2x^2-a_2-x-\cancel{1}$$

Ser at $a_2=2$. Altså:

$$\frac{3x^2-3x-2}{(x^2-1)\cdot(x-1)} = \frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}+\frac{(-1)}{(x-1)^2} \qquad \square$$

eks. 2 $\int \frac{x^3+3x^2+4x}{(x^2+2x+2)^3}\,dx$

① Grad teller 3, grad nevner 6, dvs. ok.

② $x^2+2x+2=0$ har ingen reelle løsninger, dvs. ok.

③ $$\frac{x^3+3x^2+4x}{(x^2+2x+2)^3} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+2x+2} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{A_3x+B_3}{(x^2+2x+2)^3}$$

Ganger opp:

$$x^3+3x^2+4x = (A_1x+B_1)(x^2+2x+2)^2 + (A_2x+B)(x^2+2x+2) + A_3x+B_3$$

Her må $A_1=0$, fordi A_1 blir alene foran x^5 til høyre

Dermed må $B_1=0$, — " — B_1 — " — x^4 — " —

Gang så ut resten, og lag likningssystem. ◻