Funksjonsdrøfting 6.4

Definisjon

La $I \subseteq D_f$ være et intervall, og la a og b være to punkter i I. At f er

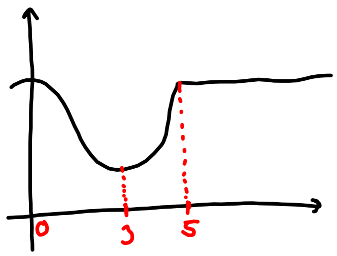
strengt voksende betyr at $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

voksende ———— " ———— $f(a) \leq f(b)$

strengt avtakende ———— " ———— $f(a) > f(b)$

avtakende ———— " ———— $f(a) \geq f(b)$.

Eksempel:



f er:

- strengt avtakende på $[0,3]$.
- strengt voksende på $[3,5]$.
- f er voksende på $[3,\infty)$.

Teorem

Anta at f er kontinuerlig på I og deriverbar på det indre av I.

- Hvis $f'(x) > 0$ på det indre av I, så er f strengt voksende på I.
- Hvis $f'(x) < 0$ ———— " ————, så er f strengt avtakende på I.

Bevis: Anta $f'(x) > 0$ på det indre av I. La $p, q \in I$ slik at $p < q$. Middelverdisetningen sier da at det eksisterer en $c \in (p,q)$ slik at

$$\frac{f(q) - f(p)}{q - p} = f'(c)$$

positiv

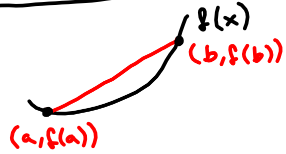
positiv

$$\Longrightarrow f(q) - f(p) > 0 \Longrightarrow f(q) > f(p).$$

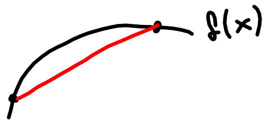
Altså er f strengt voksende på I. Tilfellet $f'(x) < 0$, gjøres på tilsvarende måte. ∎

Konvekse og konkave funksjoner

Geometrisk tolkning:



f er konveks dersom sekanten mellom to punkter ligger over f.



f er konkav dersom sekanten mellom to punkter ligger under f.

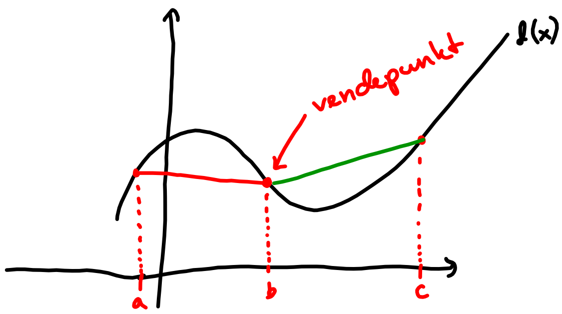
Definisjon

La $I \subseteq D_f$ være et intervall. Vi sier at f er konkav på I dersom vi har at for $a, b \in I$, så er sekanten mellom a og b under funksjonsgrafen til f. Dvs.

$$L(x) \leq f(x) \quad \text{for alle} \quad x \in (a,b)$$

hvor $L(x)$ er funksjonsuttrykket til sekanten. Begrepet konveks defineres ved å bytte $\leq$ med $\geq$.

Eksempel:



- f er konkav på $[a,b]$
- f er konveks på $[b,c]$.

Teorem

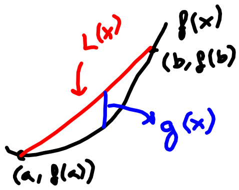
Anta at f er kontinuerlig på I, og to ganger deriverbar på det indre av I.

- Hvis $f''(x) \geq 0$ på det indre av I, så er f konveks på I.
- Hvis $f''(x) \leq 0$ ——— " ——— konkav på I.

Bevis: Anta $f''(x) \geq 0$. La $a<b$ og la $L(x)$ være funksjonsuttrykket for sekanten mellom a og b.

Vi definerer

$g(x) = L(x) - f(x)$

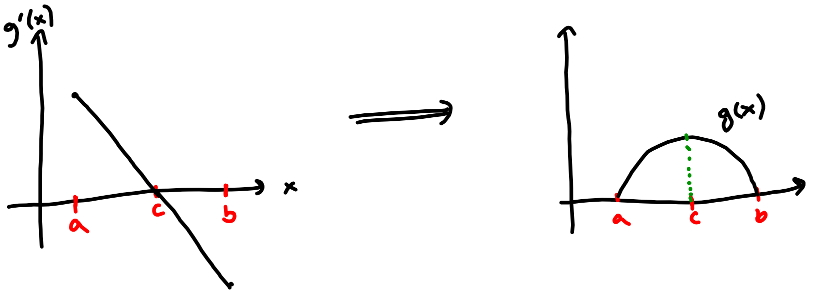


Vi har da at

$$g''(x) = L''(x) - f''(x) = -f''(x) \leq 0.$$

Vi har at $L(x)$ er en linje, så $L(x) = cx + d$, så $L''(x) = 0$.

Så $g''(x) \leq 0$ på (a,b) så ved det forrige teoremet så er $g'(x)$ avtakende på $[a,b]$.
Videre har vi at $g(a) = g(b) = 0$, så ved Rolles teorem så finnes en $c \in (a,b)$ slik at $g'(c) = 0$.
Siden $g'(x)$ er avtakende på $[a,b]$ så må vi ha at $g'(x) \geq 0$ for $x \in (a,c)$ og $g'(x) \leq 0$ for $x \in (c,b)$.



Så $g(x) \geq 0$ på (a,b). Dvs. $L(x) - f(x) \geq 0$ på $(a,b) \Longrightarrow L(x) \geq f(x)$ for alle $x \in (a,b)$.
Så f er konkav på $[a,b]$.

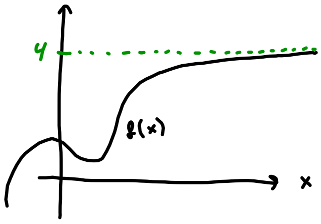
Asymptoter 6.5

Definisjon

Linjen $y=a$ er en horisontal asymptote for f hvis

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a \quad \text{eller} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a.$$

Eksempel:



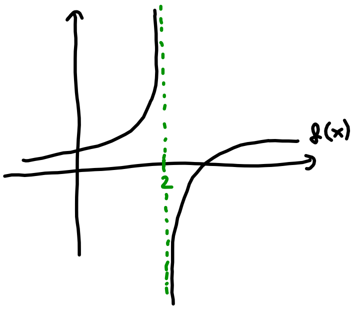
Linjen $y=4$ er en horisontal asymptote for $f(x)$.

Definisjon

Linjen $x=a$ er en vertikal asymptote for f dersom

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{eller} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty.$$

Eksempel:



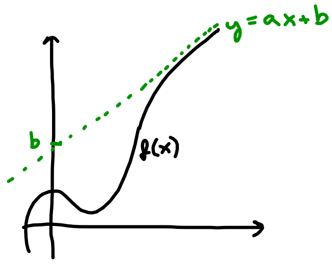
Vi ser at $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty$ og $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$, så f har en vertikal asymptote i $x=2$.

Definisjon

Linjen $y = ax+b$ der $a \neq 0$ er en skrå asymptote for f dersom

$$\lim_{x\to\infty} [\underbrace{f(x) - (ax+b)}_{\text{avstanden mellom } f \text{ og linjen } ax+b.}] = 0 \quad \text{eller} \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

Eksempel:



Linjen $ax+b$ er en skrå asymptote.

Hvordan kan vi finne skrå asymptoter?

Setning (Metode for å finne skrå asymptote når $x \to \infty$)

① Finn $a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.

② Finn $b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} ax\left(\frac{f(x)}{ax} - 1\right)$

Dersom både a og b finnes så er $y = ax + b$ en skrå asymptote, og dersom a eller b ikke finnes så har f ingen skrå asymptote når $x \to \infty$.

Vi bruker samme metode for å finne skrå asymptoter når $x \to -\infty$.

Eksempel: Vi skal undersøke om $f(x) = xe^{1/x}$ har skrå asymptoter. Vi sjekker først når $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}e^{1/x}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{1/x} = e^0 = 1.$$

Så vi har $a = 1$. Vi sjekker om b eksisterer:

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} (\underbrace{xe^{1/x}}_{\to\infty} - \underbrace{x}_{\to\infty})$$

$$= \lim_{x\to\infty} \underbrace{x}_{\to\infty}\underbrace{(e^{1/x} - 1)}_{0}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x} \cdot \cancel{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}}{\cancel{\frac{-1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{1/x} = 1.$$

Så $b = 1$. Dermed får vi at vi har en skrå asymptote $y = x + 1$.

Vi må sjekke hva som skjer når $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}e^{1/x}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to-\infty} e^{1/x} = 1,$$

så $a=1$. Vi sjekker b:

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x)-ax) = \lim_{x\to-\infty} (xe^{1/x} - x)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x(e^{1/x} - 1)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{1/x} \cdot \cancel{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}}{\cancel{-1/x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} e^{1/x}$$

$$= 1$$

Vi ser at vi finner samme skrå asymptote når $x \to \infty$ som når $x \to -\infty$. Vi kan konkludere med at f kun har en skrå asymptote, og at den er i $x+1$.