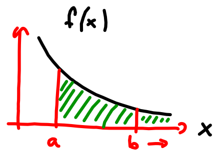
Uegentlige integraler (9.5)

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$



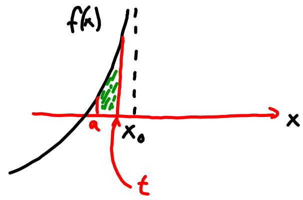
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\infty} f(x)\,dx$$

Hvis $f(x)$ har en vertikal asymptote i $x = x_0$ og $a < x_0 < b$, så definerer vi

$$\int_a^{x_0} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{t\to x_0^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

$$\int_{x_0}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to x_0^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

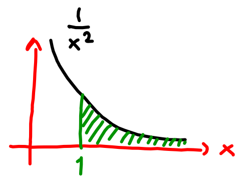


eks. 1

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right] = \lim_{b\to\infty} \left[1 - \underset{\to 0}{\frac{1}{b}}\right] = \underline{\underline{1}}$$



(Integralet konvergerer mot 1.)

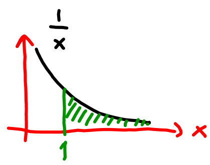
eks. 2

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\ln x\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\ln b - \underset{0}{\ln 1}\right] = +\infty$$

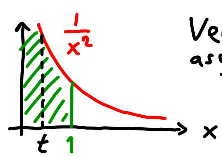
(Integralet divergerer)



Hvis vi får et endelig tall som svar på et uegentlig integral, sier vi at integralet konvergerer. Ellers divergerer det.

eks. 3

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x^2}\,dx$$



Vertikal asymptote $x = 0$.

$$= \lim_{t\to 0^+} \left[-\frac{1}{x}\right]_t^1 = \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{1}{t} - 1\right] = \underline{\underline{+\infty}}$$

(divergens)

Teorem (p-integralene)

Integralet $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ $\begin{cases} \text{konvergerer for } p > 1 \\ \text{divergerer for } p \leq 1 \end{cases}$

(Hadde i sted $p = 2$ og $p = 1$)

Bevis Vi vet at $p = 1$ gir divergens. Anta $p \neq 1$. Vi får

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} x^{-p}\,dx = \lim_{b \to \infty} \left[\frac{1}{-p+1} x^{-p+1}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left[\frac{1}{1-p} b^{1-p} - \frac{1}{1-p} \cdot 1\right]$$

$$= \lim_{b \to \infty} \frac{1}{1-p}\left[b^{1-p} - 1\right] = \lim_{b \to \infty} \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right]$$

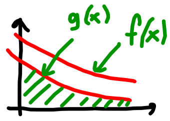
Her går $\frac{1}{b^{p-1}}$ mot 0 hvis $p > 1$, og b^{1-p} går mot ∞ hvis $p < 1$.

Altså konvergens hvis $p > 1$ og divergens hvis $p < 1$. $\square$

Teorem (Sammenlikningstesten for integraler)

La f og g være kontinuerlige, med $0 \leq g(x) \leq f(x)$ for alle $x \geq a$

(i) Hvis $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergerer, så konvergerer $\int_a^\infty g(x)\,dx$



(ii) " $\int_a^\infty g(x)\,dx$ divergerer, så divergerer $\int_a^\infty f(x)\,dx$

Bevis Kompletthet + figur. (se bok)

Eks. Avgjør om det uegentlige integralet $\int_e^\infty \frac{1}{x^3+\ln x}\,dx$ konvergerer.

Løsn. Vi vet at $\int_e^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ konvergerer (p-integral med $p=3$)

Vi har $$0 \leq \frac{1}{x^3+\ln x} \leq \frac{1}{x^3} \quad \text{for } x \in [e, \infty)$$

Sammenlikningstesten del (i) med $f(x) = \frac{1}{x^3}$ og $g(x) = \frac{1}{x^3+\ln x}$ gir da at integralet konvergerer. $\square$

Teorem (Grense-sammenlikningstesten for integraler) (GS-testen)

Gitt integralene $\int_a^\infty f(x)\,dx$ og $\int_a^\infty g(x)\,dx$, der f og g er positive og kontinuerlige. Hvis

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ fins og } 0 < L < \infty$$

så enten konvergerer begge integralene eller divergerer begge integralene.

Bevis Velg konstanter P og Q slik at $0 < P < L < Q$.

Siden $\frac{f(x)}{g(x)} \to L$, har vi for store nok x

$$P < \frac{f(x)}{g(x)} < Q, \text{ dvs. } P\cdot g(x) < f(x) < Q\cdot g(x)$$

Vi bruker så den vanlige sammenlikningstesten:

$\int f(x)\,dx$ konv. $\Rightarrow \int P\cdot g(x)\,dx$ konv., dvs. $\int g(x)\,dx$ konv.

$\int f(x)\,dx$ div. $\Rightarrow \int Q\cdot g(x)\,dx$ div., dvs. $\int g(x)\,dx$ div. $\square$

Eks. Avgjør om det uegentlige integralet $\int_2^\infty \frac{x^{3/2} - \ln x}{x^{5/2}+1}\,dx$ konvergerer.

Løsn. Ser på dominerende ledd: Integranden "går som" $\frac{x^{3/2}}{x^{5/2}} = \frac{1}{x}$

Vi vet at $\int_2^\infty \frac{1}{x}\,dx$ divergerer. (p-integral med $p = 1$)

Vi bruker da GS-testen med $g(x) = \frac{1}{x}$:

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{x^{3/2} - \ln x}{x^{5/2}+1}\right)\cdot x}{\left(\frac{1}{x}\right)\cdot x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{5/2} - x\ln x}{x^{5/2}+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{\ln x}{x^{3/2}}\xrightarrow{} 0}{1 + \frac{1}{x^{5/2}}\xrightarrow{} 0} = 1.$$

Altså divergens ved GS-testen.