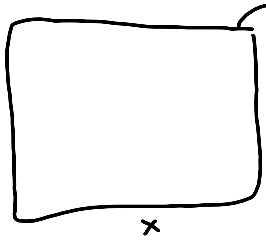
Anvendelser av derivasjon kap. 7

Maksimum og minimumsproblemer 7.1

Eksempel

Vi har en 20cm lang ståltråd, vi ønsker å bøye den sammen til et rektangel. Hvordan kan vi bøye den slik at arealet blir størst mulig?

ståltråd på 20 cm



$$y = \frac{20-2x}{2} = 10 - x$$

Arealet blir da

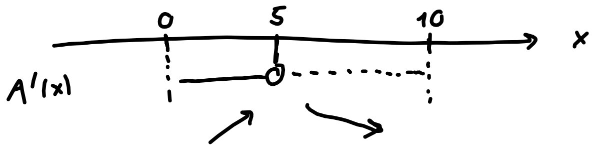
$$A(x) = x \cdot (10-x) \quad \text{hvor} \quad x \in [0, 10].$$

Vi deriverer og setter lik null:

$$A'(x) = (10x - x^2)' = 10 - 2x = 0$$

$$\longrightarrow 2x = 10 \longrightarrow x = 5$$

For å se at dette er et maksimumspunkt så tegner vi en fortegnslinje



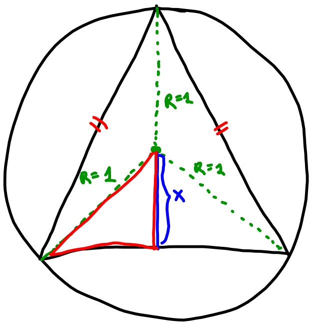
Vi ser at $x = 5$ er et maksimumspunkt, og arealet er da $A(5) = 5(10-5) = 25$.
Vi ser at vi får det største arealet når vi har et kvadrat med sidelengde 5.

Fremgangsmåte for maksimum og minimumsproblemer.

1. Tegn en tegning av situasjonen.
2. Bestem hva den ukjente variabelen skal være ut i fra hva vi ønsker å maksimere/minimere.
3. Sett opp det vi ønsker å maksimere/minimere som en funksjon av x.
4. Derivere å finne maksimum/minimum.
5. Lag fortegnslinje (eller skriv en forklaring) for å konkludere.

Eksempel

Hva er det største arealet en likebeint trekant kan ha dersom den er innskrevet i en sirkel med radius 1?



$A = \frac{g \cdot h}{2}$

Vi får at høyden $h = 1 + x$ og grunnlinjen $g = 2 \cdot \sqrt{1-x^2}$ (Ved bruk av pythagoras).
Vi får da at arealet er gitt ved

$$A(x) = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{\cancel{2}\sqrt{1-x^2} \cdot (1+x)}{\cancel{2}} = \sqrt{1-x^2} \cdot (1+x).$$

Vi deriverer og setter lik null for å finne maksimum:

$$A'(x) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} \cdot (-\cancel{2}x)(1+x) + \sqrt{1-x^2} \cdot 1$$

produkt-regelen.

$$= \frac{-x \cdot (1+x)}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad -x(1+x) + \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-x^2} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad -x(1+x) + 1 - x^2 = 0$$

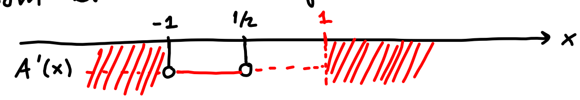
$$\Longrightarrow \quad -x - x^2 + 1 - x^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad -2x^2 - x + 1 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-2) \cdot 1}}{2 \cdot (-2)} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{-4} = \frac{1 \pm 3}{-4}$$

$$\Longrightarrow \quad x = \begin{cases} 1/2 \\ -1. \end{cases}$$

Vi lager en fortegnslinje for å undersøke hva som er maksimumspunktet:



$A'(x) = \frac{-x(1+x)}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}$

$A'(0) = 0 + \sqrt{1-0}$
$= +1$

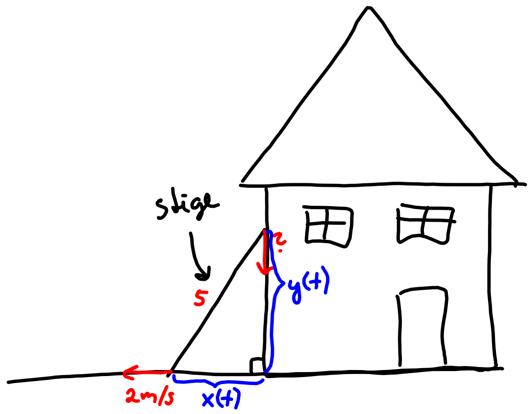
Vi ser at $x = 1/2$ er et maksimumspunkt, og arealet blir da

$$A(1/2) = (1 + 1/2) \cdot \sqrt{1 - (1/2)^2}$$
$$= 3/2 \cdot \sqrt{1 - 1/4}$$
$$= 3/2 \cdot \sqrt{3/4} = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{3}}{4}}}.$$

Koblede hastigheter 7.2

Eksempel

En 5 m lang stige står lent mot en husvegg. Stigen begynner å bevege seg med en hastighet på 2 m/s vekk fra veggen.



Hvor fort går den øverste enden nedover veggen når den nederste enden er 4 m fra veggen?

Vi lar $x(t)$ være avstanden fra bunnen av stigen til veggen og $y(t)$ være avstanden fra toppen av stigen til bakken. Ved pytagoras får vi

$$x(t)^2 + y(t)^2 = 5^2$$

Ved å derivere på begge sider så får vi

$$2x(t)\cdot x'(t) + 2y(t)\cdot y'(t) = 0$$

Siden vi er interessert i å finne $y'(t)$, så løser vi likningen med hensyn på $y'(t)$:

$$2y(t)y'(t) = -2x(t)\cdot x'(t)$$

$$y'(t) = \frac{-\cancel{2}x(t)\cdot x'(t)}{\cancel{2}y(t)} = \frac{-x(t)\cdot x'(t)}{y(t)}$$

Vi vil finne $y'(t)$ når $x(t) = 4$. Vi bruker likningen over til å finne $y(t)$ i det punktet:

$$y(t)^2 + x(t)^2 = 25$$

$$y(t)^2 = 25 - 4^2$$

$$y(t) = \sqrt{9} = 3$$

Vi får da at $y'(t)$ er

$$y'(t) = \frac{-x(t)x'(t)}{y(t)} = \frac{-4\cdot 2}{3} = \frac{-8}{3}\ m/s.$$

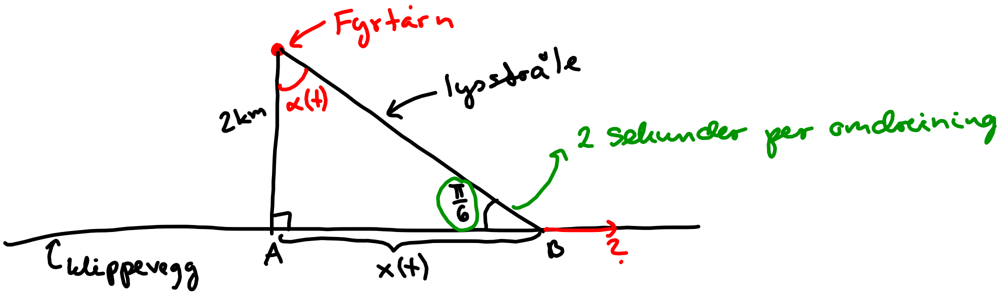
Så stigen beveger seg nedover husveggen med en fart på 8/3 m/s når bunnen av stigen er 4m unna veggen.

Fremgangsmåte for koblede hastigheter

1. Tegn en tegning av situasjonen.
2. Bestemme hvilke endringer de to ukjente funksjonene $x(t)$ og $y(t)$ skal beskrive.
3. Sett opp en likning som beskriver sammenhengen mellom $x(t)$ og $y(t)$.
4. Deriver på begge sider og løs likningen med hensyn på den hastigheten som vi er interessert i å finne.

Eksempel

Et fyrtårn sender ut en roterende stråle som bruker 2 sekunder per omdreining. Lyset treffer en klippevegg som er 2km unna.
Hvor fort beveger lysstrålen seg bortover klippeveggen når vinkelen mellom klippeveggen og strålen er $\pi/6$?



Vi må starte med å finne en sammenheng mellom $\alpha(t)$ og $x(t)$: Vi vet at

$$\tan(\theta) = \frac{\text{motstående}}{\text{hosliggende}}$$

Da får vi at

$$\tan(\alpha(t)) = \frac{x(t)}{2}$$

Vi deriverer på begge sider:

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha(t))} \cdot \alpha'(t) = \frac{1}{2} x'(t)$$

$$\Longrightarrow \quad x'(t) = \frac{2\alpha'(t)}{\cos^2(\alpha(t))}$$

Siden summen av alle vinkler i en trekant er π så får vi at $\alpha(t) = \pi - \pi/2 - \pi/6$

$$= \frac{6\pi}{6} - \frac{3\pi}{6} - \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{2\pi}{6}$$

$$= \frac{\pi}{3}.$$

Siden ~~at~~ $\alpha(t)$ går 2π på 2 sekunder, så får vi at $\alpha'(t) = \pi/s$. Til slutt kan vi finne $x'(t)$:

$$x'(t) = \frac{2\alpha'(t)}{\cos^2(\alpha(t))} = \frac{2\cdot\pi}{\cos^2(\pi/3)} = \frac{2\pi}{(1/2)^2} = 8\pi \approx 25{,}1 \text{ km/s}.$$