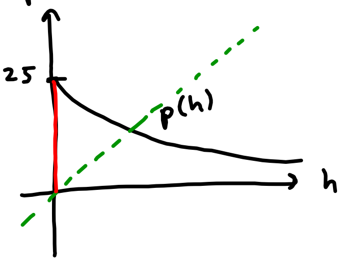
Omvendte funksjoner 7.4

Eksempel

Vi har en planet hvor trykket som funksjon av høyden er gitt ved

$$p(h) = \frac{100}{4+h}$$



Vi kan omvendt finne høyden som funksjon av trykket, ved å løse mhp. h:

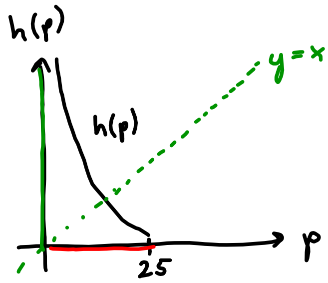
$$p = \frac{100}{4+h}$$

$$(4+h)p = 100$$

$$4+h = \frac{100}{p}$$

$$h = \frac{100}{p} - 4$$

$$h(p) = \frac{100}{p} - 4$$



Mer generelt svarer dette til at funksjonene

$$f(x) = \frac{100}{4+x} \qquad D_f = [0,\infty), \quad V_f = (0,25]$$

og

$$g(x) = \frac{100}{x} - 4 \qquad D_g = (0,25], \quad V_g = [0,\infty)$$

er omvendte funksjoner av hverandre. Vi har at

$$g(f(x)) = \frac{100}{\frac{100}{4+x}} - 4 = \frac{(4+x)\cancel{100}}{\cancel{100}} - 4 = 4+x-4 = x$$

Tilsvarende har vi at $f(g(x)) = x$.

Definisjon

Funksjonene f og g er omvendte av hverandre dersom

$$f(g(x)) = x \quad \text{for alle } x \in D_f \qquad D_g = V_f$$

$$g(f(x)) = x \quad \text{for alle } x \in D_g \qquad D_f = V_g.$$

Vi skriver da at $g(x) = \underline{f^{-1}(x)}$ og $f(x) = \underline{g^{-1}(x)}$.

Geometrisk tolkning: Grafene til f og g blir speilbilder om diagonalen $y = x$.

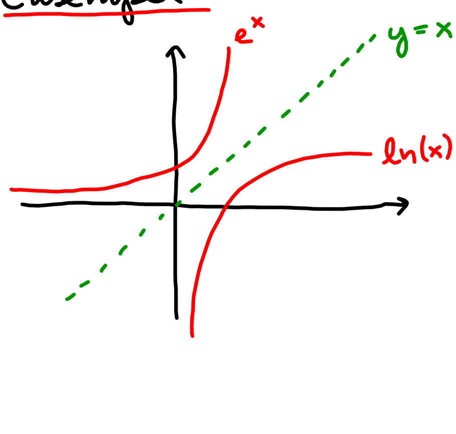
Merk: For at f^{-1} skal finnes så må vi ha at for alle $b \in V_f$ så finnes det kun en $a \in D_f$ slik at $f(a) = b$. Vi sier da at f er injektiv eller en-til-en.

Setning

Dersom $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig så er f injektiv (eller en-til-en) hvis og bare hvis den er strengt monoton. (strengt voksende eller strengt avtakende)

Bevis: Se i ukesoppgavene.

Eksempel:



$$e^{\ln(x)} = x$$

$$\ln(e^x) = x\ln(e) = x$$

$$D_{e^x} = \mathbb{R} = V_{\ln}$$

$$D_{\ln} = (0, \infty) = V_{e^x}$$

Så e^x og $\ln(x)$ er omvendte funksjoner av hverandre.

Teorem

Hvis D_f er et intervall og f er kontinuerlig og strengt monoton, så gjelder

(i) Den omvendte funksjonen f^{-1} også er kontinuerlig.

(ii) Hvis f er deriverbar i x og $f'(x) \neq 0$ så er f^{-1} deriverbar i $f(x)$ og

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right) = \frac{1}{f'(x)}$$

Bevis for formelen i punkt (ii):

Vi vet $f^{-1}(f(x)) = x$, så vi bruker kjerneregelen og deriverer på begge sider:

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right) \cdot f'(x) = 1$$

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Eksempel:

Anta at f og g er omvendte funksjoner og at

$$f(1) = 4 \quad \text{og} \quad g'(4) = 2$$

Finn $f'(1)$.

Ved formelen har vi at

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$g'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)}$$

$$g'(4) = \frac{1}{f'(1)}$$

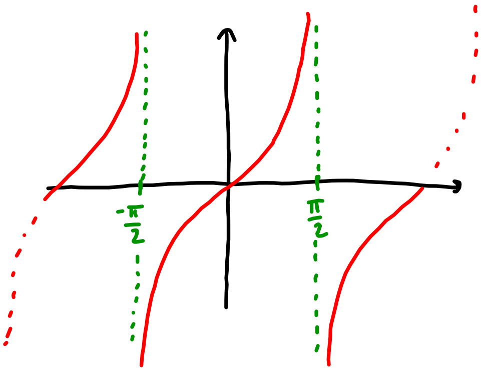
$$2 = \frac{1}{f'(1)}$$

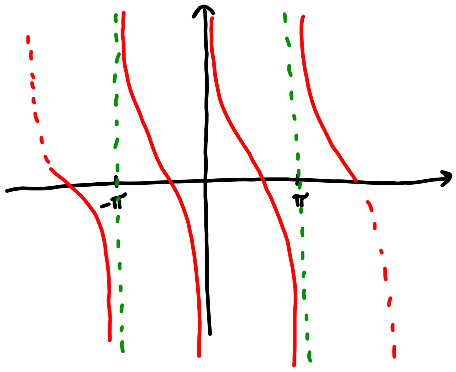
$$2f'(1) = 1$$

$$f'(1) = \frac{1}{2}.$$

Cotangens 7.5

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$





Den deriverte av cotangens:

$$(\cot(x))' = \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)' = \frac{-\sin(x)\sin(x) - \cos(x)\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

brøkregelen

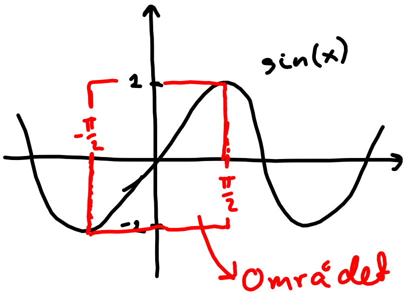
$$= \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)}$$

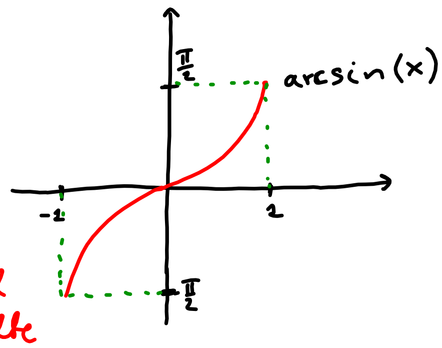
$$= \frac{-(\sin^2(x) + \cos^2(x))}{\sin^2(x)}$$

$$= \underline{\underline{\frac{-1}{\sin^2(x)}}}.$$

Arkusfunksjonene 7.6

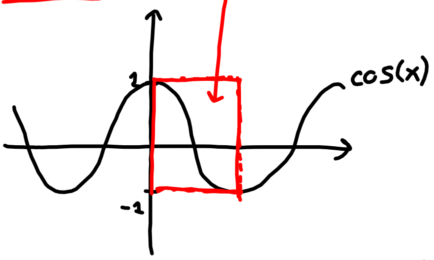
Sin(x)

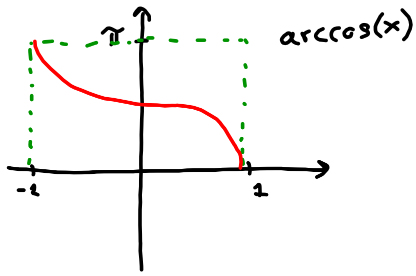




Området som vi skal definere den omvendte funksjonen på

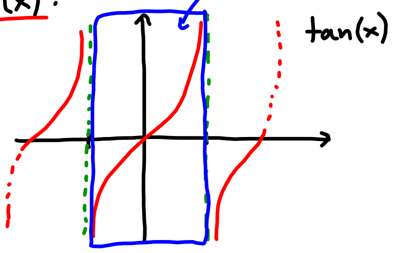
cos(x):

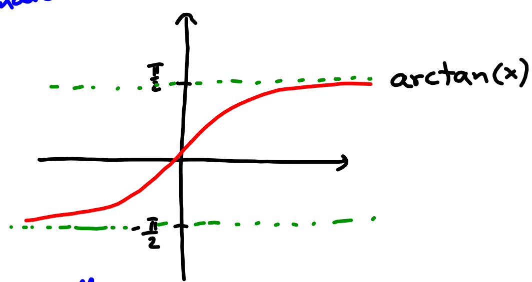




tan(x):

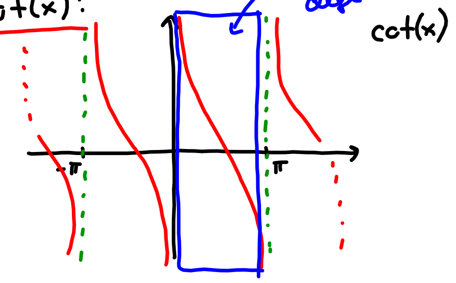
Området hvor vi definerer den omvendte funksjonen

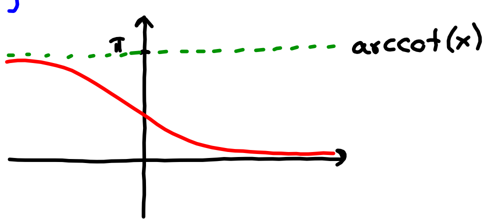




cot(x):

Område hvor vi definerer den omvendte funksjonen





De deriverte av arcusfunksjonene

Vi husker at $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$

tan(x):

Nå har vi $f^{-1} = \arctan(x)$ og $f = \tan(x)$, vi får da at

$$\arctan'(\tan(x)) = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \frac{1}{1+\tan^2(x)}$$

Vi gjør et navneskifte og bytter $\tan(x) \longmapsto x$, vi får da at

$$\boxed{\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

sin(x):

Vi har nå at $f^{-1} = \arcsin(x)$ og $f = \sin(x)$, vi får da at

$$\arcsin'(\sin(x)) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin^2(x)+\cos^2(x) &= 1\\ \cos(x) &= \sqrt{1-\sin^2(x)}\end{aligned}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}$$

Vi gjør nå et navneskifte og bytter ut $\sin(x) \longmapsto x$, vi får da:

$$\boxed{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

For de resterende så får vi at

$$\boxed{\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

og

$$\boxed{\text{arccot}'(x) = \frac{-1}{1+x^2}}$$