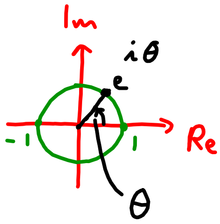
$\boxed{\text{Den komplekse eksponentialfunksjonen}}$ (forts.)

Vi har definert

$$e^{i\theta} \overset{\text{def}}{=} \cos\theta + i\sin\theta \qquad \text{for } \theta \in \mathbb{R}$$



Definerer nå for alle $z = a + ib$ i $\mathbb{C}$

$$e^{z} = e^{a+ib} \overset{\text{def}}{=} e^{a} \cdot e^{ib}$$
$$= e^{a}(\cos b + i\sin b)$$
$$= \underbrace{(e^{a}\cos b)}_{\text{realdel}} + i\underbrace{(e^{a}\sin b)}_{\text{imaginærdel}}$$

Ser herfra at e^{a+ib} har modulus e^{a} og argument b

Eks. Finn $e^{2+i\pi}$

Løsn. $e^{2+i\pi} = e^{2}(\cos\pi + i\sin\pi) = e^{2}(-1 + i\cdot 0) = -e^{2}$
$\approx -7{,}389$

Setning 3.3.4

$$e^{z+w} = e^{z} \cdot e^{w} \quad \text{for alle } z, w \in \mathbb{C}$$

Bevis La $z = a + ib$ og $w = c + id$

$$VS = e^{z+w} = e^{(a+ib)+(c+id)}$$

$$= e^{(a+c)+i(b+d)}$$

$$\overset{\text{def}}{=} e^{a+c} \cdot \left(\cos(b+d) + i \sin(b+d)\right) \quad (*)$$

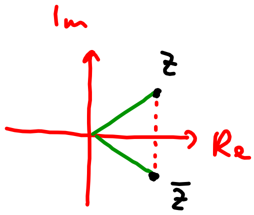
$$HS = e^{z} \cdot e^{w} = \underbrace{\underbrace{e^{a+ib}}_{\substack{\text{modulus } e^{a} \\ \text{argument } b}} \cdot \underbrace{e^{c+id}}_{\substack{\text{modulus } e^{c} \\ \text{argument } d}}}$$

så produktet har (pr. def av multiplikasjon)
modulus $e^{a} \cdot e^{c} \overset{\text{vet}}{=} e^{a+c}$
og argument $b+d$. Akkurat som $(*)$

Altså $VS = HS$. $\square$

Konjugasjon

Husk at hvis $z = a + ib$,
er $\bar{z} = a - ib$



Eks. $\overline{2+3i} = 2 - 3i$

$\overline{-i+17} = \overline{17 + (-1)\cdot i} = 17 + i$

$\overline{i(i+2)} = \overline{-1+2i} = -1 - 2i$

Setning 3.1.5 (litt utvidet) For alle $z, w \in \mathbb{C}$ gjelder

(i) $\bar{z} + \bar{w} = \overline{z+w}$

(ii) $\bar{z} - \bar{w} = \overline{z-w}$

(iii) $\bar{z}\cdot\bar{w} = \overline{zw}$

(iv) $\dfrac{\bar{z}}{\bar{w}} = \overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}$

(v) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Bevis (v) La $z = a + ib$. Da:

$$z\cdot\bar{z} = (a+ib)\cdot(a-ib)$$

$$= a^2 - i\cancel{ab} + i\cancel{ba} - \underbrace{i^2}_{-1} b^2 = a^2 + b^2$$

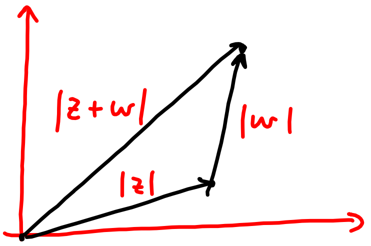
$$|z|^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2 + b^2 \quad \square$$

Geometri i det komplekse planet

Setning 3.2.7 Trekantulikheten

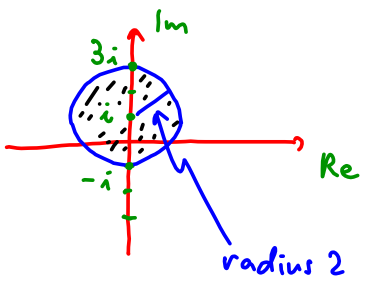
$$|z+w| \leq |z| + |w| \quad \text{for alle } z, w \in \mathbb{C}$$

Bevis



Eks. Skissér området $\{z : |z-i| \leq 2\}$

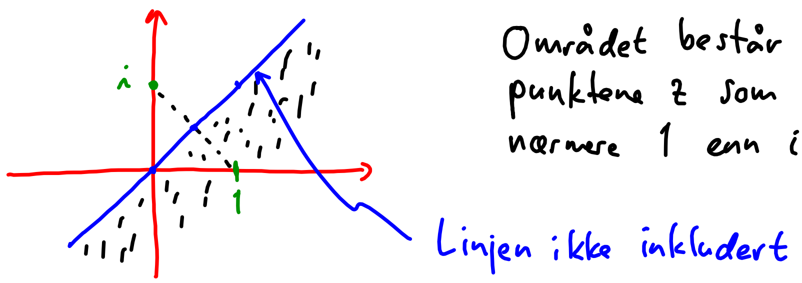
Løsn. Generelt om slike problemstillinger: Husk at $|z-w|$ er avstanden mellom z og w i det komplekse planet.



Området blir en sirkelskive med sentrum i punktet i og radius 2.

Eks Skisser området $\{z : |z-1| < |z-i|\}$

Løsn.



Området består av de punktene z som ligger nærmere 1 enn i

Setning 3.3.5: De Moivres formel

For alle reelle tall θ og alle naturlige tall n er

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Bevis

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n$$

Utledes fra $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$

$$\stackrel{\downarrow}{=} e^{(i\theta)\cdot n} = e^{i(n\theta)} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \quad \square$$

Eks. Uttrykk $\cos 2\theta$ og $\sin 2\theta$ ved $\cos\theta$ og $\sin\theta$

Løsn.

$$\cos 2\theta + i\sin 2\theta \overset{\text{d.M.}}{=} (\cos\theta + i\sin\theta)^2$$

$$= \cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta + \underbrace{i^2}_{-1}\sin^2\theta$$

$$= (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + i(2\sin\theta\cos\theta)$$

Så:

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$