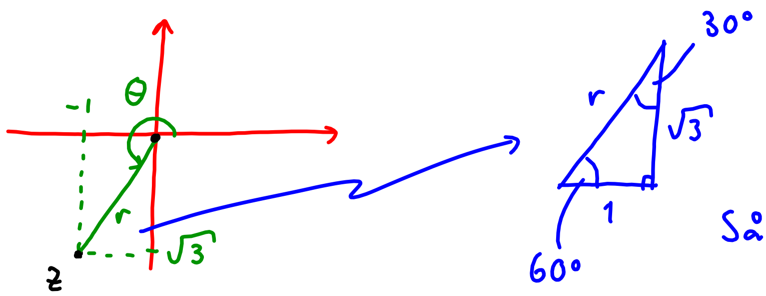
[Første time: NMR-testen. Her er notater fra 2. time]

Med en <u>kvadratrot</u> av det komplekse tallet z menes et komplekst tall w slik at

$$w^2 = z$$

<u>Eks.</u> Finn kvadratrøttene til $z = -1 - i\sqrt{3}$

<u>Løsn.</u>



$r^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2$

$r^2 = 4$

$r = 2$

Så 30/60/90-trekant

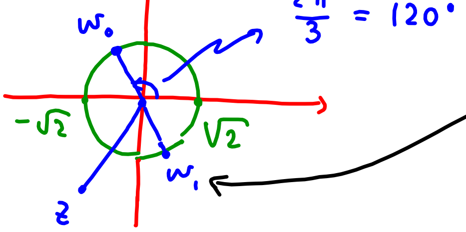
Altså $\theta = 180^\circ + 60^\circ = \pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi = \frac{4\pi}{3}$

Så $z = \underline{2e^{i(4\pi/3)}}$

Finne tall som ganget med seg selv gir z:

→ Halverer vinkelen θ og tar kvadratroten av r

Så $\underline{w_0 = \sqrt{2}\, e^{i(2\pi/3)}}$ er en kvadratrot av z



Men det fins en løsning her også:

$$w_1 = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \pi\right)} = \underline{\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)}}$$

$$= \underline{w_0 \cdot e^{i\pi}}$$

Så z har to kvadratrøtter. Skriver dem på rektangulær form:

$$w_0 = \sqrt{2}\, e^{i(2\pi/3)}$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}\, i$$

$$\boxed{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\, i$$

$$w_1 = \sqrt{2}\, e^{i(5\pi/3)}$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\, i$$

Sjekk av w_1:

$$w_1^2 = w_1\cdot w_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i\right)$$

$$= \frac{2}{4} - \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{4}i - \frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{4}i - \frac{6}{4}$$

$$= -1 - \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{2}i = -1 - \sqrt{3}\, i = z$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{2} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{6}}{\cancel{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3}}$$

Hvordan finne kvadratrøttene av et komplekst tall $z \neq 0$

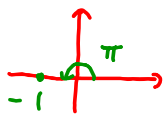
① Skriv z på formen $z = re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$

② Regn ut kvadratroten $w_0 = \sqrt{z} \overset{\text{def}}{=} \sqrt{r}\, e^{i(\theta/2)}$

③ Den andre kvadratroten er $w_1 = w_0 \cdot e^{i\pi}$ → gir rotasjon $180° = \pi$

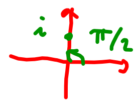
Eks. Finn kvadratrøttene av -1.

$r = 1$



Løsn. ① $-1 = 1 \cdot e^{i\pi}$ $re^{i\theta}$

② $w_0 = \sqrt{1}\, e^{i(\pi/2)} = e^{i(\pi/2)} = i$



③ $w_1 = w_0 \cdot e^{i\pi} = e^{i(\pi/2)} \cdot e^{i\pi} = e^{i(3\pi/2)} = -i$

Kvadratrøttene av -1 er i og $-i$