Med en n'te-rot av det komplekse tallet z menes et komplekst tall w slik at

$$w^n = z$$

Det viser seg at hvert komplekst tall $z \neq 0$ har n ulike n'te-røtter.

Hvordan finne disse:

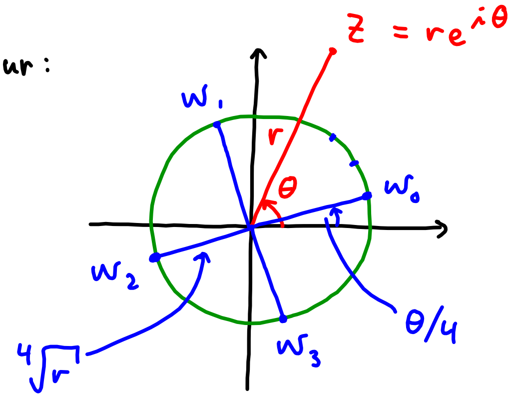
1. Skriv z på polarform $z = re^{i\theta}$, der $\theta \in [0, 2\pi)$.
2. Regn ut $w_0 = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\theta/n)}$
3. Regn ut $w_+ = e^{i(2\pi/n)}$

(2–3) Skriv på formen $a + ib$ hvis det er aktuelt

4. Finn de $n-1$ øvrige røttene:

$$w_1 = w_0 \cdot w_+$$
$$w_2 = w_1 \cdot w_+$$
$$\vdots$$
$$w_{n-1} = w_{n-2} \cdot w_+$$

Figur:

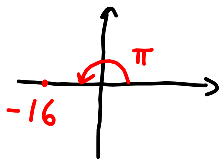


← Her er $n = 4$

De n ulike n'te-røttene vil alltid ligge jevnt fordelt på sirkelen med sentrum origo og radius $\sqrt[n]{r}$.

Eks. Finn fjerderøttene til $z = -16$

Løsn. ①

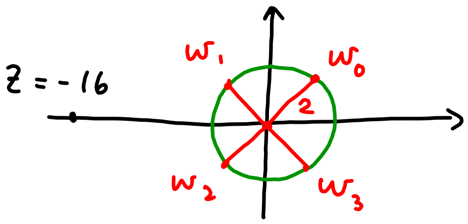


$$z = 16e^{i\pi}$$

$$r = 16, \quad \theta = \pi$$

② $$w_0 = \sqrt[4]{r}\, e^{i(\theta/4)}$$

$$= \sqrt[4]{16}\, e^{i(\pi/4)} = 2e^{i(\pi/4)}$$



③ $$w_+ = e^{i(2\pi/4)} = e^{i(\pi/2)} = i$$

④ $$w_1 = w_0 \cdot w_+ = 2e^{i(\pi/4)} \cdot e^{i(\pi/2)} = 2e^{i(3\pi/4)}$$

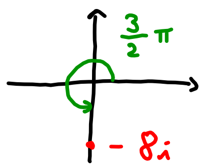
$$w_2 = w_1 \cdot w_+ = 2e^{i(3\pi/4)} \cdot e^{i(\pi/2)} = 2e^{i(5\pi/4)}$$

$$w_3 = w_2 \cdot w_+ = 2e^{i(5\pi/4)} \cdot e^{i(\pi/2)} = 2e^{i(7\pi/4)}$$

Røttene: $\underline{\underline{2e^{i(\pi/4)},\ 2e^{i(3\pi/4)},\ 2e^{i(5\pi/4)},\ 2e^{i(7\pi/4)}}}$

Eks. Finn tredjerøttene til $z = -8i$. Skriv røttene på formen $a + ib$.

Løsn. ①

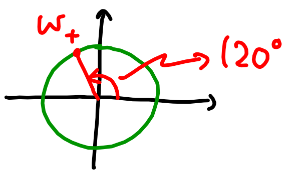


$$z = 8e^{i(3\pi/2)}$$

$$r = 8, \quad \theta = \frac{3\pi}{2}$$

② $$w_0 = \sqrt[3]{r}\, e^{i(\theta/3)} = \sqrt[3]{8}\, e^{i(\pi/2)} = 2e^{i(\pi/2)} = \underline{\underline{2i}}$$

③ $$w_+ = e^{i(2\pi/3)} = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}$$



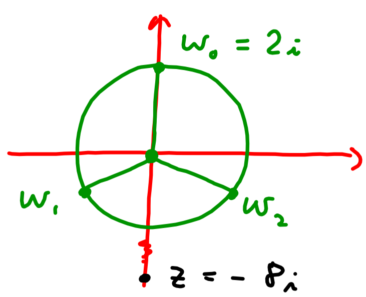
$$= -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

④ $$w_1 = w_0 \cdot w_+ = 2i \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -i - \sqrt{3} = \underline{\underline{-\sqrt{3} - i}} = (-\sqrt{3}) + (-1) \cdot i$$

$$w_2 = w_1 \cdot w_+ = (-\sqrt{3} - i) \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{\sqrt{3} - i}}$$



Komplekse andregradslikninger

Setning Hvis $x > 0$ er et reelt tall, så er

$$\sqrt{-x} = \sqrt{(-1)\cdot x} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{x} = i\cdot\sqrt{x}$$

Bevis $-x = xe^{i\pi}$, så

$$\sqrt{-x} = \sqrt{x}\,e^{i(\pi/2)} = \sqrt{x}\cdot i \quad \square$$

Eks. $\sqrt{-16} = \sqrt{(-1)\cdot 16} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{16} = i\cdot 4 = 4i$

$\sqrt{-1} = i\cdot\sqrt{1} = i$

Men (advarsel):

Regelen $\sqrt{zw} = \sqrt{z}\cdot\sqrt{w}$ gjelder ikke generelt for komplekse tall. Moteksempel:

$$-1 = i\cdot i = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} \overset{\text{nix}}{=} \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Setning 3.4.5 La $a, b, c \in \mathbb{C}$, med $a \neq 0$.
Da har likningen $az^2 + bz + c = 0$ løsningene

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Bevis Identisk med det reelle tilfellet. $\square$

Eks. $x^2 - 4x + 5 = 0$ gir

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{(-1) \cdot 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm i \cdot 2}{2} = \begin{cases} 2 + i \\ 2 - i \end{cases}$$

Eks. $(x-i)\cdot(x-1) = x^2 - ix + i - x$
$= x^2 - (1+i)x + i$

Likning: $x^2 - (1+i)x + i = 0$

Løsn.

$$x = \frac{(1+i) \pm \sqrt{(1+i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot i}}{2}$$

$$= \frac{(1+i) \pm \sqrt{(1+2i-1) - 4i}}{2}$$

$$= \frac{(1+i) \pm \sqrt{1-2i-1}}{2} = \frac{(1+i) \pm \sqrt{(1-i)^2}}{2}$$

$$= \frac{(1+i) \pm (1-i)}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+\cancel{i}+1-\cancel{i}}{2} = 1 \\ \dfrac{\cancel{1}+i-\cancel{1}+i}{2} = i \end{cases}$$

Alternativt:
$\sqrt{2i-4i} = \sqrt{-2i}$
Må så finne $\sqrt{-2i}$ på vanlig måte, og skrive på rektangulær form