n-tupler (FLVA 1.1 og 1.2)

Definisjoner

Et n-tuppel er et uttrykk $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$
der $a_1, \dots, a_n$ er reelle tall. Altså en vektor med n komponenter.

$\mathbb{R}^n$ = mengden av alle n-tupler

$\mathbb{R}^2$ = planet $\quad \mathbb{R}^3$ = "rommet"

Hvis $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ og $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$, så er

$$\vec{a} + \vec{b} \overset{\text{def}}{=} (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

$$\vec{a} - \vec{b} \overset{\text{def}}{=} (a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n)$$

$s\vec{a} \overset{\text{def}}{=} (sa_1, \dots, sa_n)$, s reelt tall (kalles en "skalar")

$|\vec{a}| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$ (lengden av $\vec{a}$)

$\vec{a} \cdot \vec{b} \overset{\text{def}}{=} a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$ (skalarprodukt eller prikkprodukt)

Teorem For alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ og alle $s, t \in \mathbb{R}$ gjelder:

(1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

(3) $s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$

(4) $(s+t)\vec{a} = s\vec{a} + t\vec{a}$

(5) $\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b}$

(6) $(s\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (s\vec{b}) = s \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$

(7) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ og $|s\vec{a}| = |s| \cdot |\vec{a}|$

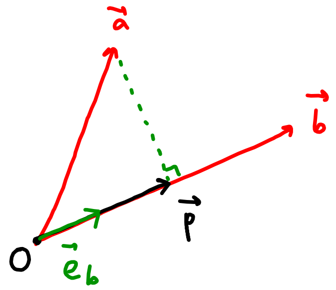
Bevis: Snakket. Se bok.

Projeksjonen $\vec{p}$ av $\vec{a}$ på vektoren $\vec{b}$

Projeksjonen $\vec{p}$ av vektoren $\vec{a}$ ned på vektoren $\vec{b}$ er definert ved

$$\vec{p} \overset{\text{def}}{=} (\vec{a}\cdot\vec{e}_b)\,\vec{e}_b$$

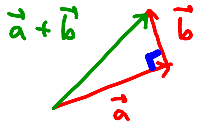
der $\vec{e}_b = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ (enhetsvektor i retning $\vec{b}$)



Teorem For alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ gjelder

(8) Hvis $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, så er $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$

Tolkning:



(Generalisert Pytagoras)

(9) Projeksjonen $\vec{p}$ av $\vec{a}$ ned på $\vec{b}$ oppfyller

$$\vec{p} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\,\vec{b} \qquad |\vec{p}| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|} \qquad \vec{p}\cdot(\vec{p}-\vec{a}) = 0$$

(10) $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ (Schwarz' ulikhet)

(11) $|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (Trekantulikheten)

Bevis Vi refererer til forrige teorem ved tallene (1) – (7).

(8)
$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 \overset{(7)}{=} (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) \overset{(5)}{=} \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} \overset{(7)}{=} |\vec{a}|^2 + 0 + 0 + |\vec{b}|^2$$

(9)
$$\vec{p} \overset{\text{def}}{=} (\vec{a}\cdot\vec{e}_b)\,\vec{e}_b = \left(\vec{a}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \overset{(6)}{=} \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\cdot\vec{b}$$

(9) forts. Dermed:

$$|\vec{p}| \overset{(7)}{=} \left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right| \cdot |\vec{b}| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

Videre:

$$\vec{p}\cdot(\vec{p}-\vec{a}) \overset{(5)}{=} \vec{p}\cdot\vec{p} - \vec{p}\cdot\vec{a}$$

$\boxed{\text{Formelen for } \vec{p} \text{ utledet nettopp}}$

$$= \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\cdot\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\cdot\vec{b}\right) - \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{a}$$

$$\overset{(6)}{=} \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{b}|^4}\underbrace{(\vec{b}\cdot\vec{b})}_{|\vec{b}|^2} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}(\vec{b}\cdot\vec{a}) = 0$$

(10) La $\vec{p}$ være projeksjonen av $\vec{a}$ ned på $\vec{b}$

Siden $\vec{p}\cdot(\vec{a}-\vec{p}) = 0$ ved (9), får vi

$$|\vec{p}+(\vec{a}-\vec{p})|^2 \overset{(8)}{=} |\vec{p}|^2 + |\vec{a}-\vec{p}|^2$$

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{a}-\vec{p}|^2$$

Så

$$|\vec{a}| \geq |\vec{p}| \overset{(9)}{=} \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

Altså

$$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| \geq |\vec{a}\cdot\vec{b}|$$

(11) $$|\vec{a}+\vec{b}|^2 \overset{(7)}{=} (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$\overset{(10)}{\leq} |\vec{a}|^2 + 2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| + |\vec{b}|^2 = (|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2.$$ D

Vinkelen mellom n-tupler

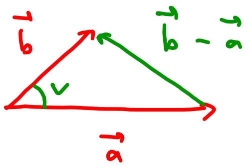
Vi definerer vinkelen v mellom to n-tupler $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ved

$$v \overset{\text{def}}{=} \arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right)$$

Ved Schwartz' ulikhet er tallet vi tar arccos til her, alltid i intervallet $[-1, 1]$. Merk at vi alltid har $v \in [0, \pi]$.

Hvis $v = \frac{\pi}{2}$, sier vi at $\vec{a}$ står <u>vinkelrett</u> (eller <u>normalt</u>) på $\vec{b}$, og vi skriver $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Motivasjon for definisjonen



Cosinus-setningen:

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\cdot\boxed{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos v}$$

Vi får da

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2 = (\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = \vec{b}\cdot\vec{b} - 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{a}$$

$$= |\vec{b}|^2 - 2\cdot\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}} + |\vec{a}|^2$$

Sammenlikning gir at $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos v$

Altså
$$\cos v = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

dvs.
$$\underline{v = \arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right)}$$