Teorem For alle $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ i $\mathbb{R}^n$ gjelder at

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \text{vinkelen } v \text{ mellom } \vec{a} \text{ og } \vec{b} \text{ er } \tfrac{\pi}{2}, \text{ dvs. } \vec{a} \perp \vec{b}$$

Bevis For $v \in [0, \pi]$ har vi

$$v = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

$$\iff \cos v = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

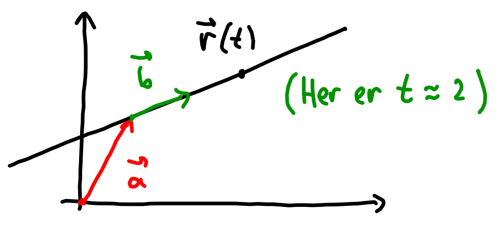
$$\iff \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos v$$

Her er høyre side lik 0 hvis og bare hvis $\cos v = 0$, dvs. $v = \frac{\pi}{2}$. □

Linjer i $\mathbb{R}^n$

La $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Linjen gjennom $\vec{a}$ med retningsvektor $\vec{b}$ (også kalt linjen gjennom $\vec{a}$ parallell med $\vec{b}$) består av punktene

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + t \cdot \vec{b}, \quad \text{der } t \in \mathbb{R}.$$



Komplekse n-tupler (1.3)

$\vec{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ der $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$

Eks. $\vec{z} = (2+i, -i, 5, 0) \in \mathbb{C}^4$

$\vec{z} + \vec{w}$, $\vec{z} - \vec{w}$ og $s\vec{z}$ for $s \in \mathbb{C}$ er definert som før.

Eks. $i(2+i, i) \overset{def}{=} (i(2+i), i \cdot i) = (2i-1, -1)$

Men lengde og skalarprodukt blir litt annerledes:

$$|\vec{z}| \overset{def}{=} \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2}$$

$$\vec{z} \cdot \vec{w} \overset{def}{=} z_1 \overline{w_1} + \ldots + z_n \overline{w_n}$$

Motiv: Vi får

$$\vec{z} \cdot \vec{z} = z_1 \overline{z_1} + \ldots + z_n \overline{z_n} = |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 = |\vec{z}|^2$$

Dermed blir også noen regneregler annerledes, se setning 1.3.4 i boken. F.eks.

$$\vec{z} \cdot \vec{w} = \overline{\vec{w} \cdot \vec{z}}$$

Men "generalisert Pytagoras", Schwarz og trekantulikheten blir uforandret (1.3.5 i bok).

Preludium til 1.4 : Determinanter (fra 1.8)

2 x 2 - determinanter

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

eks. $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = 5\cdot(-2) - 3\cdot 7 = -10 - 21 = \underline{-31}.$

Større determinanter enn 2 x 2

regnes ut ved å "løse opp etter 1. linje". For 3x3-determinanter:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\cdot\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\cdot\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\cdot\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Regler for slik oppløsning:

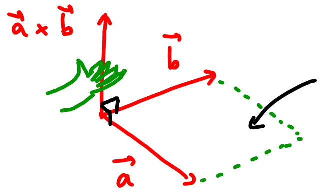
- fortegnet veksler + - + - ... bortover
- underdeterminantene vi får å gange med, fremkommer ved å stryke linjen og søylen det aktuelle tallet i linje 1 er med i.

eks.
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 8 & 9 \\ 1 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 5\cdot\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$$
$$= 2\cdot(-24-63) - 3\cdot(-12-9) + 5\cdot(28-8)$$
$$= 2\cdot(-87) + 3\cdot(21) + 5\cdot 20 = \text{regn ut.}$$

Vektorprodukt (1.4)

Vektorproduktet $\vec{a} \times \vec{b}$ av to vektorer i $\mathbb{R}^3$ er en ny vektor i $\mathbb{R}^3$ slik at

- $\vec{a} \times \vec{b}$ står normalt på både $\vec{a}$ og $\vec{b}$
- $\vec{a}$, $\vec{b}$ og vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$ danner et høyrehåndssystem:



lengden av $\vec{a} \times \vec{b}$ er arealet av parallellogrammet utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$

Algebraisk definisjon

Vektorproduktet av $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ og $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ er

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \text{der} \quad \begin{cases} \vec{e}_1 = (1,0,0) \\ \vec{e}_2 = (0,1,0) \\ \vec{e}_3 = (0,0,1) \end{cases}$$

eks. $\vec{a} = (1, 0, 3)$ og $\vec{b} = (-2, 6, 4)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_1 (0 - 18) - \vec{e}_2 (4 + 6) + \vec{e}_3 (6 - 0)$$

$$= -18 \cdot \vec{e}_1 - 10\, \vec{e}_2 + 6\, \vec{e}_3$$

$$= -18 \cdot (1,0,0) - 10\,(0,1,0) + 6 \cdot (0,0,1)$$

$$= (-18, 0, 0) - (0, 10, 0) + (0, 0, 6) = \underline{\underline{(-18, -10, 6)}}$$

<u>Teorem</u> La $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ være vektorer i $\mathbb{R}^3$, og la $s \in \mathbb{R}$. Da har vi:

(1) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

(2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$

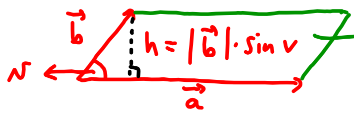
(3) $(s\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (s\vec{b}) = s \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

(4) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$ (står normalt)

(5) $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

(6) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin v$, der v er vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Med andre ord: $|\vec{a} \times \vec{b}|$ er arealet av parallellogrammet utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$



Areal $g \cdot h = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin v$

<u>Bevis</u> (1)-(5): Sett inn $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ og $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ og regn ut begge sidene.

(6): Ved (5) har vi:

$$
\begin{aligned}
|\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \\
&\overset{\text{vet}}{=} |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos v)^2 \\
&= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2 v \\
&= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 v) \\
&\overset{\boxed{\sin^2 v + \cos^2 v = 1}}{=} |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \sin^2 v.
\end{aligned}
$$

Ta så $\sqrt{\ }$. $\square$