DELFØLGELEMMA

Simon Foldvik

1. Mars 2020

Lemma 1. *La X være en mengde og (A_k) en følge av delmengder av X. Anta at (u_n) er en følge i X slik at det for alle $k, N \in \mathbb{N}$ eksisterer $n \geq N$ med $u_n \in A_k$. Da finnes det en delfølge (u_{n_k}) av (u_n) slik at*

$$u_{n_k} \in A_k \quad \textit{for alle} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Bevis. Ved velordningsprinsippet definerer vi en avbildning $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ved

$$f(k, N) \coloneqq \min\{n \in \mathbb{N} : n \geq N + 1 \text{ og } u_n \in A_{k+1}\} \quad (k, N \in \mathbb{N}).$$

Videre finner vi en følge (n_k) i $\mathbb{N}$ slik at $u_{n_0} \in A_0$ og

$$n_{k+1} = f(k, n_k) \quad \text{for alle} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Denne følgen er strengt voksende, og (u_{n_k}) er en delfølge av (u_n) som oppfyller (1). ∎

Lemmaet er nyttig for å konstruere delfølger med ønskede egenskaper ved å bake disse inn i mengdene A_k.

Eksempel 2. La (u_n) være en begrenset følge av reelle tall, og la

$$\alpha \coloneqq \limsup u_n.$$

La $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ være en synkende omegnsbasis om α. Da finnes det for hver $k, N \in \mathbb{N}$ en $n \geq N$ slik at $u_n \in V_k$, og dermed en delfølge (u_{n_k}) av (u_n) slik at $u_{n_k} \in V_k$ for alle k. Det følger at $u_{n_k} \to \alpha$. Med andre ord, enhver begrenset følge av reelle tall har en konvergent delfølge.