Et spørsmål om kontinuerlig utvidelse.

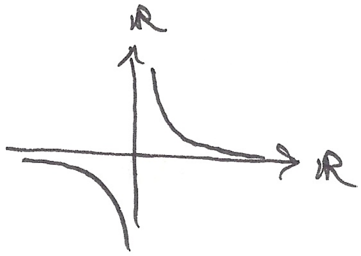
MAT1100 — Grublegruppen.

Simon Foldvik, 24. sep. 2020.

---

① La funksjonen $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ være definert ved

$$f(x) = 1/x \quad \text{for alle} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$



Vi vet at f er kontinuerlig.

② Med en utvidelse av f til $\mathbb{R}$ menes en

funksjon $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ slik at $\tilde{f}|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} = f$,

dvs. slik at $\tilde{f}(x) = f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Med en kontinuerlig utvidelse av f til $\mathbb{R}$

menes en utvidelse $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som også er kontinuerlig.

③ Påstand: med f som ovenfor, finnes det ingen

kontinuerlig utvidelse av f til $\mathbb{R}$.

<u>Bevis</u> Anta for motsigelse at f hadde en kont. utvidelse til $\mathbb{R}$ og la $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en slik utvidelse.

Da er $\tilde{f}$ kont. på det lukkede og begrensede intervallet $[-1, 1]$. Ved ekstremalverdisetningen er $\tilde{f}$ ~~...~~ begrenset der, dvs. vi finner en $M > 0$ slik at $|\tilde{f}(x)| \leq M$ for alle $x \in [-1, 1]$.

Siden $\tilde{f}$ er en utvidelse av f, må da

$$|f(x)| \leq M \quad \text{for alle} \quad x \in [-1, 1] \setminus \{0\}.$$

Dette er en motsigelse: men har $\frac{1}{n} \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ for alle $n \geq 1$, men

$$|f(1/n)| = \left| \frac{1}{(1/n)} \right| = n \to +\infty$$

når $n \to \infty$. Spesielt finnes det en $n \geq 1$ slik at $|f(1/n)| > M$. Motsigelse! ∎

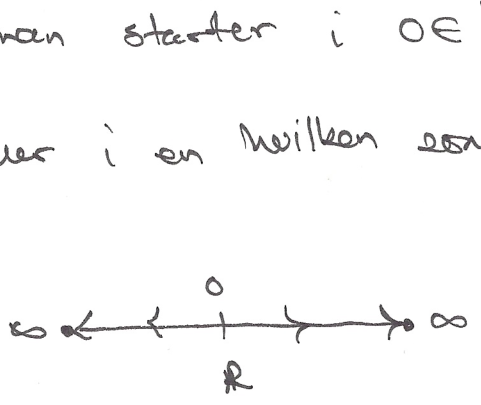
④ Det er mulig å legge til et idealisert punkt "i det uendelige", kall det ∞, slik at det utvidede rommet $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tillater en kontinuerlig utvidelse av f fra $\mathbb{R}$ inn i $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Vi skal se nærmere på dette nå.

⑤ Velg et objekt ∞ som ikke er med i $\mathbb{R}$.

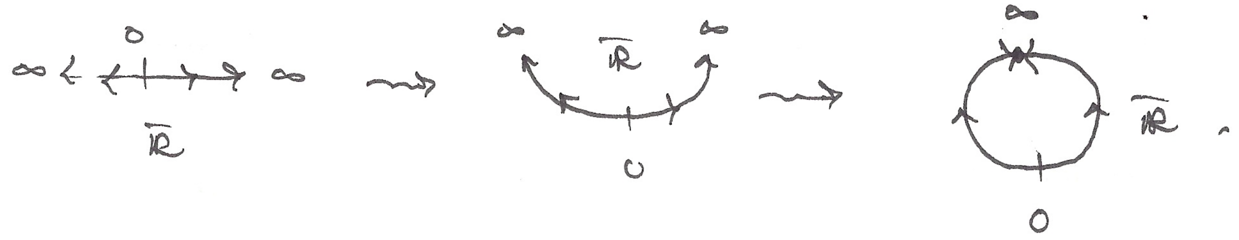
La $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

⑥ En topologi på $\overline{\mathbb{R}}$ er noe vagt en spesifikasjon av "romlig struktur" på $\overline{\mathbb{R}}$, altså noe som forteller oss hvordan punktene i $\overline{\mathbb{R}}$ forholder seg til hverandre romlig sett.

⑦ Det er ønskelig (og mulig!) å spesifisere en topologi på $\overline{\mathbb{R}}$ som er slik at ∞ er punktet man kommer til når man starter i $0 \in \overline{\mathbb{R}}$ og "går vilkårlig langt utover i en hvilken som helst retning":



⑧ Slik sett er det mer naturlig å visualisere $\overline{\mathbb{R}}$ som en sirkel:



Enhetssirkelen betegnes S^1 og er et topologisk rom.

Det er mulig å formalisere argumentet ovenfor om at $\overline{\mathbb{R}}$ topologisk sett er en sirkel ved å vise at $\overline{\mathbb{R}}$ og S^1 er homeomorfe (topologisk ekvivalente: $\overline{\mathbb{R}} \cong S^1$).

Man sier at sirkelen S^1 er ettpunktskompaktifiseringen til $\mathbb{R}$.

⑨ La oss returnere til funksjonen $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ fra punkt ②. I punkt ③ så vi at f ikke tillater noen kontinuerlig utvidelse til $\mathbb{R}$.

Ved å danne det utvidede rommet $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (sirkelen), kan man anse f som en funksjon inn i $\overline{\mathbb{R}}$:

$$
\begin{tikzcd}
 & \overline{\mathbb{R}} \\
\mathbb{R}\setminus\{0\} \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, bend left, "x \mapsto f(x)"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{R} \arrow[u, hook, "x \mapsto x"']
\end{tikzcd}
$$

1c) Ved å anse f som en funksjon $\mathbb{R}\setminus\{0\} \to \overline{\mathbb{R}}$,

kan man vise at den har en kontinuerlig utvidelse

$\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, nemlig funksjonen $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ gitt

ved

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{hvis } x \neq 0 \\ \infty & \text{hvis } x = 0 \end{cases}$$

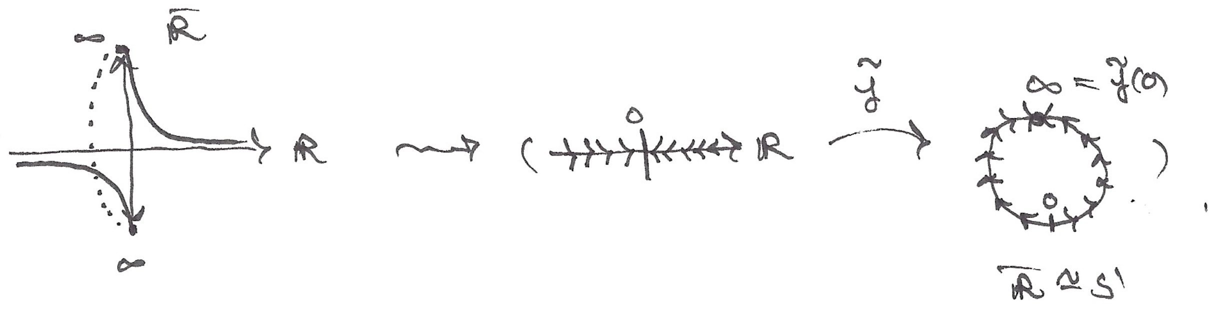
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\tilde{f}"] & \overline{\mathbb{R}} \\ \mathbb{R}\setminus\{0\} \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{R} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

At $\tilde{f}$ er kontinuerlig i 0 har å gjøre med at

$f(x) \to +\infty$ når $x \downarrow 0$; $f(x) \to -\infty$ når $x \uparrow 0$;

og dermed kan man si $f(x) \to \infty$ i $\overline{\mathbb{R}}$ når $x \to 0$.

(Det er mulig å vise dette formelt.)



$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$