UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1100 — Kalkulus (prøveeksamen)
Eksamensdag:	Lørdag 3. oktober 2020
Tid for eksamen:	10.00 – 14.00
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	På eksamen deles formelsamling ut
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen består av 18 oppgaver. Alle oppgavene teller like mye. Det er bare ett riktig alternativ på hver oppgave. Om du svarer galt eller lar være å svare på en oppgave, får du 0 poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Krysser du av mer enn ett alternativ på en oppgave, får du 0 poeng.

Oppgave 1. Det komplekse tallet $z = -2 - 2\sqrt{3}\,i$ kan skrives:

A) $z = \sqrt{8}e^{i(3\pi/2)}$
B) $z = 4e^{i(4\pi/3)}$
C) $z = 2 + 3i$
D) $z = 4e^{i(2\pi/3)}$
E) $z = \sqrt{8}e^{i(3\pi/4)}$

Oppgave 2. Hvilken x er en løsning av likningen $e^{ix} + i = 0$:

A) $x = i$
B) $x = \pi$
C) $x = 1$
D) $x = \pi/2$
E) $x = -\pi/2$

Oppgave 3. En drone flyr i konstant høyde 60 meter rett sørover fra senderen med hastigheten 5 meter per sekund. Hvor fort øker avstanden i luftlinje fra senderen til dronen når dronen befinner seg 80 meter sør for senderen?

A) 1 m/s
B) 2 m/s
C) 3 m/s
D) 4 m/s
E) 4,5 m/s

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 4. Mengden $\{z : |z-2| > 3\}$ i det komplekse planet er:

A) Mengden av komplekse tall z som ligger utenfor sirkelen med sentrum 2 og radius 3
B) Mengden av komplekse tall z som ligger innenfor sirkelen med sentrum 2 og radius 3
C) Mengden av komplekse tall z som ligger nærmere 2 enn 3
D) Mengden av komplekse tall z som har realdel større enn 3
E) Mengden av komplekse tall z som er slik at realdelen til $z-1$ er større enn 3

Oppgave 5. Hvilket komplekst tall w er en sjetterot til $z = -64$:

A) $w = 4e^{i(\pi/3)}$
B) $w = e^{i(\pi/6)}$
C) $w = 2$
D) $w = 2e^{i(\pi/6)}$
E) $w = 2e^{-i(\pi/3)}$

Oppgave 6. La $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være en funksjon som er to ganger deriverbar. Hvilket utsagn er sant:

A) Hvis f er konveks, så er den strengt voksende
B) Hvis det finnes et punkt $t \in [a, b]$ slik at $f'(t) = 0$, så er ikke f konveks
C) Hvis $f''(x) \leq 0$ for alle x, så er f konkav
D) Hvis $f''(x) \leq 0$ for alle x, så er f konveks
E) Hvis t er slik at $f''(t) = 0$, så er t et vendepunkt for f

Oppgave 7. Den deriverte til $f(x) = \arctan(e^{2x}) + e^{2\arctan x}$ er gitt ved:

A) $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}}{1+e^{4x}} - \dfrac{2e^{2\arctan x}}{1+x^2}$

B) $f'(x) = \dfrac{1}{1+e^{4x}} - \dfrac{2e^{2\arctan x}}{1+x^2}$

C) $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}}{1+e^{4x}} + \dfrac{2e^{2\arctan x}}{1+x^2}$

D) $f'(x) = \dfrac{1}{1+e^{4x}} + \dfrac{2e^{2\arctan x}}{1+(2x)^2}$

E) $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(e^{2x})} + \dfrac{2e^{2\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}$

Oppgave 8. Det komplekse tallet $z = 2e^{-i(\pi/4)}$ kan skrives:

A) $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$
B) $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
C) $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
D) $z = 2 - 2i$
E) $z = -2 + 2i$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 9. $\lim_{x\to 0^+}(4x)^{2\sin x}$ er lik:

A) 1
B) 2
C) $+\infty$
D) 0
E) $-\infty$

Oppgave 10. La f, g og h være deriverbare funksjoner fra $\mathbf{R}$ til $\mathbf{R}$, og la s være den sammensatte funksjonen gitt ved $s(x) = f(g(h(x)))$ for alle $x \in \mathbf{R}$. Da er:

A) $s'(x) = f'(g'(h'(x)))$

B) $s'(x) = f'(g(h(x)))g'(h(x))$

C) $s'(x) = f'(g(h(x)))g'(h(x)) + g'(h(x))h'(x)$

D) $s'(x) = f'(g(h(x))) \cdot g'(h'(x))$

E) $s'(x) = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$

Oppgave 11. La $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ være følgen gitt ved $a_n = (-1)^n + \dfrac{n^2+8n+9}{n^3+7n}$. Hvilket utsagn er sant?

A) Følgen konvergerer mot $(-1)^n$
B) Følgen konvergerer mot -1
C) Følgen konvergerer mot 0
D) Følgen konvergerer mot 1
E) Følgen divergerer

Oppgave 12. La $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være en injektiv, deriverbar funksjon som oppfyller $f(1) = 2$ og $f'(1) = 1/3$. La g være den omvendte funksjonen til f. Da er $g'(2)$ lik:

A) 3
B) 2
C) 1
D) 1/3
E) 1/9

Oppgave 13. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x}{2x^3+x^4}$ er lik:

A) 0
B) 1/2
C) 1
D) 2
E) ∞

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 14. La g være den omvendte funksjonen til $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbf{R}$ gitt ved $f(x) = \sin^3 x + 1$. Definisjonsområdet D_g til g er da:

A) $D_g = (-1, 1)$
B) $D_g = [-2, 0]$
C) $D_g = [0, 2]$
D) $D_g = [-(2^{1/3}), 0]$
E) $D_g = \mathbf{R}$

Oppgave 15. $\lim_{x\to\infty} (e^x - x \ln x)$ er:

A) $+\infty$
B) e^2
C) e^{-2}
D) $-\infty$
E) 0

Oppgave 16. La $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ være gitt ved $f(x) = 1/x$. Hvilket utsagn er sant?

A) For alle $t > 0$ fins $\delta > 0$ slik at hvis $|x - 1| = \delta$, så er $|f(x) - 1| > t$
B) For alle $\epsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at hvis $|f(x) - f(2)| < \delta$, så er $|x - 1| < \epsilon$
C) For alle $\epsilon > 0$ fins $t > 0$ slik at hvis $|x - 1| < t$, så er $|f(x) - 1| < \epsilon$
D) For alle $N > 0$ fins $\delta > 0$ slik at hvis $|x - 1| < \delta$, så er $|f(x) - 1| > N$
E) For alle $N > 0$ fins $M > 0$ slik at hvis $|x| > M$, så er $|f(x)| > N$

Oppgave 17. La $f(x) = 13xe^{-2/x}$ med $D_f = (0, \infty)$. Hvilket utsagn er sant:

A) f har ingen asymptoter
B) f har den horisontale asymptoten $y = 4$
C) f har skråasymptoten $y = 13x$
D) f har skråasymptoten $y = 13x - 26$
E) f har den vertikale asymptoten $x = 0$

Oppgave 18. La $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være funksjonen gitt ved $f(x) = \sin(e^x)$. Hvilket utsagn er sant?

A) f har ingen globale maksimumspunkter
B) f har ingen vendepunkter
C) $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$
D) $f''(0) > 0$
E) $f''(0) < 0$

SLUTT