Løsningsforslag utsatt eksamen MAT1100 20.01.2021

Oppgave 1

$$\vec{F}'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad \text{Vil ha } \vec{F}'(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$$

Kan da ta $\vec{F}(x,y) = \underline{\underline{(6x-y,\ \pi y)}}$

Denne gir $\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial F_1}{\partial x} = 6 & \frac{\partial F_1}{\partial y} = -1 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0 & \frac{\partial F_2}{\partial y} = \pi \end{array}\right\}$ Dette gjelder i alle punkter (x,y), derfor også $(0,0)$.

Oppgave 2

a) $P(z) = z^4 + az - 81$ gir

$$P(3i) = (3i)^4 + a\cdot 3i - 81$$
$$= 81\cdot i^4 + 3ai - 81 = 81 - 3a\cdot i - 81$$

Altså $\underline{\underline{a = 0}}$

b) Har nå $P(z) = z^4 - 81$

Siden $P(z)$ er et reelt polynom og $z = 3i$ er en rot, vet vi at det konjugerte tallet $z = -3i$ også er en rot.

Altså er $P(z)$ delelig med

$$(z-3i)\cdot(z-(-3i)) = (z-3i)(z+3i) = z^2+9$$

Vi får da

$$P(z) = (z^2+9)\cdot(z^2-9)$$

(Kunne her brukt polynomdivisjon, eller konjugatsetningen direkte)

Konjugatsetningen på siste faktor gir

$$P(z) = (z^2+9)\cdot(z-3)\cdot(z+3) = (z-3i)(z+3i)(z-3)(z+3)$$

<u>Så røttene til P er $z = 3i$, $z = -3i$, $z = 3$ og $z = -3$</u>

Oppgave 3

$$a_0 = 0 \quad \text{og} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + 100$$

a) Sjekker først hvilket tall L følgen konvergerer mot, hvis den konvergerer:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} a_n + 100\right) \quad \text{gir}$$

$$L = \frac{1}{2} L + 100$$

$$\frac{1}{2} L = 100, \quad \text{dvs.} \quad \underline{L = 200}$$

Viser så at følgen er oppad begrenset av 200:

Vi har $a_0 = 0 < 200$. Anta $a_n < 200$. Da fås

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + 100 < \frac{1}{2} \cdot 200 + 100 = 200$$

Dermed har vi at $a_n < 200$ for alle $n \geq 0$. At $a_n \geq 0$ for alle n er opplagt. Altså er følgen oppad begrenset av 200 og nedad begrenset av 0. Dermed er den begrenset.

b) Vi har

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + 100$$

$$= \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} \cdot 200 > \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} a_n = a_n \quad \text{for } n \geq 0.$$

Altså er følgen voksende. Siden vi vet fra a) at den også er begrenset, får vi at den konvergerer ved kompletthetsprinsippet for følger.

Fra regningen under a) får vi nå at følgen konvergerer mot 200.

Oppgave 4

Vi kan bruke $\underline{f(x) = x}$. Beregning av integralet ved substitusjon:

$$\int_0^1 x e^{-x^2} dx = \int_0^{-1} \cancel{x} e^u \cdot \left(-\frac{1}{2\cancel{x}}\right) du = -\frac{1}{2} \int_0^{-1} e^u du$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = -x^2 & \frac{du}{dx} = -2x \\ du = -2x\,dx & dx = -\frac{1}{2x} du \\ x = 0 \text{ gir } & u = 0 \\ x = 1 \text{ gir } & u = -1 \end{array}}$$

$$= -\frac{1}{2} \left[e^u\right]_0^{-1}$$

$$= -\frac{1}{2} \left[e^{-1} - e^0\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-1}\right)$$

Oppgave 5

a) Teksten sier at

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{8}{10}x_n + \frac{6}{10}y_n + \frac{7}{10}z_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{10}x_n + \frac{2}{10}y_n + \frac{2}{10}z_n \\ z_{n+1} = \frac{1}{10}x_n + \frac{2}{10}y_n + \frac{1}{10}z_n \end{cases}$$

Altså

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{10} & \frac{6}{10} & \frac{7}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

b) Vi har

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ y_{n+2} \\ z_{n+2} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = M \cdot \left(M \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \right) = (M \cdot M) \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

Altså får vi

$$N = M^2 = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 77 & 74 & 75 \\ 12 & 14 & 13 \\ 11 & 12 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 77 & 74 & 75 \\ 12 & 14 & 13 \\ 11 & 12 & 12 \end{pmatrix}$$

Siden det snør 22. desember, er tilstanden da $\begin{pmatrix} x_{22} \\ y_{22} \\ z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

To dager senere blir tilstanden

$$\begin{pmatrix} x_{24} \\ y_{24} \\ z_{24} \end{pmatrix} = N \cdot \begin{pmatrix} x_{22} \\ y_{22} \\ z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.77 & 0.74 & 0.75 \\ 0.12 & 0.14 & 0.13 \\ 0.11 & 0.12 & 0.12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.74 \\ 0.14 \\ 0.12 \end{pmatrix}$$

Sannsynligheten for at det snør på julaften er y_{24}. Den er altså

$$\underline{\underline{0.14 = 14\,\%}}$$

Oppgave 6

Siden $\int_0^\infty f(x)\,dx$ konvergerer og $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ er avtakende, må vi ha $f(x)\geq 0$ for alle x. Videre må $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, og det følger at vi må ha $f(x)\in[0,1)$ fra et visst punkt av, si for $x\geq a$. Det holder å vise at $\int_a^\infty [f(x)]^2\,dx$ konvergerer, og dette følger nå ved sammenlikningstesten for uegentlige integraler. Siden $f(x)\in[0,1)$, har vi nemlig

$$[f(x)]^2 \leq f(x).$$

Vi sammenlikner altså $\int_b^\infty [f(x)]^2\,dx$ med det konvergente integralet

$$\int_b^\infty f(x)\,dx$$

Da får vi at integralet $\int_b^\infty [f(x)]^2\,dx$ konvergerer. Og vi får

$$\int_0^\infty [f(x)]^2\,dx = \int_0^b [f(x)]^2\,dx + \int_b^\infty [f(x)]^2\,dx$$

Altså konvergerer $\int_0^\infty [f(x)]^2\,dx$ også.

Oppgave 7

$$f(x) = \int_0^x \frac{1+\sin^2 t}{1+t^2}\,dt - 1 \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$$

a) Ved fundamentalteoremet er f deriverbar, og

$$f'(x) = \frac{1+\sin^2 x}{1+x^2} - 0 = \frac{1+\sin^2 x}{1+x^2}$$

Vi har at $f'(x) > 0$ for alle $x\in\mathbb{R}$, så f er strengt voksende på hele $\mathbb{R}$.

(Oppgave 7 forts. neste side)

(Oppgave 7 forts.)

b) Siden f er strengt voksende, har den høyst ett nullpunkt.

Vi har $f(0) = -1$, og

$$f(x) \geq \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt - 1 = \Big[\arctan t\Big]_0^x - 1 = \arctan x - 1$$

Siden $\lim_{x\to\infty} (\arctan x - 1) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$, har f positive funksjonsverdier. Velg a slik at $f(a) > 0$. Siden f er deriverbar, er den kontinuerlig. Ved skjæringssetningen brukt på intervallet $[0, a]$ følger at f har et nullpunkt i dette intervallet.

c) Siden f er kontinuerlig på hele $\mathbb{R}$, har den ingen vertikale asymptoter. For å sjekke om f har en horisontal asymptote når $x \to \infty$, må vi undersøke om grensen

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1+\sin^2 t}{1+t^2}\,dt \qquad (*)$$

eksisterer. Denne grensen kan oppfattes som det uegentlige integralet

$$\int_0^\infty \frac{1+\sin^2 t}{1+t^2}\,dt \qquad (**)$$

Vi har

$$\frac{1+\sin^2 t}{1+t^2} \leq \frac{2}{1+t^2} \leq \frac{2}{t^2}$$

Vi vet at integralet

$$\int_1^\infty \frac{2}{t^2}\,dt = 2 \cdot \int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt$$

konvergerer, fordi integralet til høyre er et p-integral med $p = 2$.

Ved sammenlikningstesten følger nå at integralet $(**)$ konvergerer.

Altså eksisterer grensen $(*)$. Hvis vi kaller grenseverdien a, har dermed f den horisontale asymptoten $y = a - 1$ når $x \to \infty$.

Når x erstattes med $(-x)$, skifter integralet i $f(x)$ fortegn. Dermed har f også den horisontale asymptoten $y = -a - 1$ når $x \to -\infty$