UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1100 — Kalkulus
Eksamensdag:	Onsdag 20. januar 2021
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Alle hjelpemidler tillatt

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen inneholder 12 deloppgaver som teller 6 poeng hver. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1. Finn et eksempel på en funksjon $\mathbf{F} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ som har Jacobimatrisen

$$\mathbf{F}'(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$$

i punktet $(0,0)$.

Oppgave 2.

a) Bestem a slik at $z = 3i$ er en rot i polynomet

$$P(z) = z^4 + az - 81$$

b) Finn alle røttene til polynomet P når a har verdien fra punkt a).

Oppgave 3. La følgen $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ være gitt ved $a_0 = 0$ og $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 100$ for $n \geq 0$.

a) Vis at følgen er begrenset.

b) Vis at følgen konvergerer, og angi hva den konvergerer mot.

Oppgave 4. Finn et eksempel på en funksjon f som er slik at integralet

$$\int_0^1 f(x)e^{-x^2}\,dx$$

kan finnes ved substitusjon eller delvis integrasjon. Beregn integralet ditt.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 5. Arne vokste opp i Bergen, men flyttet derfra i voksen alder. Han har laget følgende modell for vinterværet i Bergen:

- Hvis det regner en dag, er sannsynligheten 8/10 for at det fortsatt regner neste dag, 1/10 for at det snør og 1/10 for at det da er opphold.
- Hvis det snør en dag, er sannsynligheten 6/10 for at det regner neste dag, 2/10 for at det fortsatt snør og 2/10 for at det er opphold.
- Hvis det er opphold en dag, er sannsynligheten 7/10 for at det regner neste dag, 2/10 for at det snør og 1/10 for at det fortsatt er opphold.

La x_n, y_n og z_n være sannsynligheten for at det henholdsvis regner, snør og er oppholdsvær på vinterdag nummer n i Bergen i følge modellen, der vi regner 1. desember som vinterdag 1.

a) Begrunn at overgangsmatrisen M slik at

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \qquad \text{for } n \geq 1$$

er gitt ved

$$M = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Finn en matrise N slik at

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ y_{n+2} \\ z_{n+2} \end{pmatrix} = N \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

for alle $n \geq 1$. Et år snør det i Bergen 22. desember. Hva er sannsynligheten for at det snør på julaften (24. desember) i følge Arnes modell?

Oppgave 6.
Anta at $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ er en avtakende, kontinuerlig funksjon som er slik at det uegentlige integralet

$$\int_0^\infty f(x)\, dx$$

konvergerer. Vis at da vil det uegentlige integralet

$$\int_0^\infty (f(x))^2\, dx$$

også konvergere.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 7. La $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være funksjonen gitt ved

$$f(x) = \int_0^x \frac{1 + \sin^2 t}{1 + t^2}\, dt - 1$$

a) Begrunn at f er deriverbar, og finn $f'(x)$. Avgjør hvor f er voksende og avtakende.

b) Begrunn at f har nøyaktig ett nullpunkt.

c) Avgjør om f har vertikale, horisontale eller skrå asymptoter. (Du trenger ikke finne likningen for eventuelle asymptoter.)

SLUTT