UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1100 — Kalkulus (prøveeksamen)
Eksamensdag:	Lørdag 21. november 2020
Tid for eksamen:	10.00 – 14.00
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Alle hjelpemidler tillatt

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen inneholder 12 deloppgaver som teller 6 poeng hver. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1. Finn et eksempel på en funksjon $\mathbf{F} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ som har Jacobimatrisen

$$\mathbf{F}'(x, y) = \begin{pmatrix} \sin x & 1 \\ xy^2 & x^2 y \end{pmatrix}$$

Oppgave 2. Finn et reelt fjerdegradspolynom $P(z)$ som har de to komplekse røttene $z = 2i$ og $z = -3i$.

Oppgave 3. En stige med lengde L står lent mot en vertikal vegg. Nedre ende av stigen står på et horisontalt underlag. La H være høyden fra bakken langs veggen opp til toppen av stigen, og la B være avstanden langs bakken fra veggen til punktet der enden av stigen står. Vi har $H > 2B$.

a) Forklar hvorfor $B^2 + H^2 = L^2$.

b) Plutselig begynner stigen å skli ned veggen, slik at B og H blir funksjoner $B(t)$ og $H(t)$ av tiden t. I det øyeblikket hvor $H(t) = 2 \cdot B(t)$, er $B'(t) = 2$ (meter per sekund). Hva er $H'(t)$ akkurat da?

Oppgave 4. Finn et eksempel på et ubestemt integral som kan løses ved å bruke substitusjonen

$$u = \arcsin 2x$$

og deretter bruke delvis integrasjon. Løs så integralet ditt.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 5. La a være et reelt tall. Finn a slik at volumet av omdreiningslegemet som fås når området under grafen til

$$f(x) = x^a$$

på intervallet $[1, 2]$ dreies om y-aksen, er lik $\frac{14\pi}{3}$.

Oppgave 6. Vis at det ikke fins noen kontinuerlig funksjon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ slik at

$$\int_0^1 e^{f(t)} dt = 0.$$

Oppgave 7. En foreleser underviser på et matematikkurs med 500 studenter. Studentene kan være i tre tilstander: (1) Lese, (2) sove og (3) drive med andre ting. Foreleseren satt opp følgende modell for hvordan studentenes liv arter seg:

1. Hvis en student leser i dag, er sannsynligheten 50 % for at vedkommende driver med andre ting i morgen, og 50 % for at vedkommende fortsatt leser.
2. Hvis en student sover i dag, er sannsynligheten 50 % for at vedkommende leser i morgen, og 50 % for at vedkommende da driver med andre ting.
3. Hvis en student driver med andre ting i dag, er det hundre prosent sikkert at vedkommende sover i morgen.

La x_n, y_n og z_n være antall studenter som leser, sover og driver med andre ting på dag n i semesteret.

a) Finn x_{n+1}, y_{n+1} og z_{n+1} uttrykt ved x_n, y_n og z_n, og bruk dette til å finne overgangsmatrisen M slik at

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \qquad \text{for } n \geq 1.$$

er gitt ved

b) Finn en matrise N slik at man kommer 4 dager fremover i tiden ved å multiplisere med N, altså slik at

$$\begin{pmatrix} x_{n+4} \\ y_{n+4} \\ z_{n+4} \end{pmatrix} = N \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

for alle $n \geq 1$. Anta at alle studentene leser på dag $n = 1$. Bruk matrisen N til å avgjøre hvor mange studenter som leser, sover og driver med andre ting på dag 5 i følge modellen.

c) Avgjør om matrisene M og N er inverterbare.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 8. La K være et reelt tall, og la $f : (-\pi, \pi) \to \mathbf{R}$ være funksjonen gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan x}{\sin x} & \text{for } x \neq 0 \\ K & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

a) Finn en verdi av K som gjør at f er kontinuerlig i $x = 0$.

b) La K ha verdien du fant under a). Avgjør om f er deriverbar i $x = 0$.

SLUTT