NOEN BETRAKTNINGER OM SKJÆRING OG KOMPLETTHET
MAT1100U — KALKULUS

SIMON FOLDVIK

21. OKTOBER 2020

SAMMENDRAG. Vi viser at skjæringssetningen medfører kompletthetsprinsippet.

1. NOEN DEFINISJONER

Vi minner først om noen definisjoner.

(1) Gitt en mengde $A \subseteq \mathbb{R}$ og et tall $M \in \mathbb{R}$, sier vi at M er en *øvre skranke* for A dersom

$$a \leq M \quad \text{for alle} \quad a \in A.$$

Dersom A tillater en øvre skranke, sier vi at den er *oppad begrenset*.

(2) Et tall $M \in \mathbb{R}$ er en *minste øvre skranke* for $A \subseteq \mathbb{R}$ dersom den er en øvre skranke for A slik at $M \leq K$ for alle øvre skranker K for A.

Påstand. *En mengde har høyst én minste øvre skranke.*

Bevis. Dersom $M, K \in \mathbb{R}$ er minste øvre skranker for $A \subseteq \mathbb{R}$, så må $M \leq K$ siden M er den minste; tilsvarende må $K \leq M$ siden K er den minste. Det følger at $M = K$. ■

Definisjon 1.1. Dersom $A \subseteq \mathbb{R}$ har en minste øvre skranke, betegnes den med $\sup A$.

Med andre ord, dersom $A \subseteq \mathbb{R}$ har en minste øvre skranke, så er

$$a \leq \sup A \quad \text{for alle} \quad a \in A,$$

og $\sup A \leq M$ for alle øvre skranker M for A.

En øvre skranke M for A er *ikke* den minste øvre skranken for A nøyaktig når det finnes en øvre skranke K for A slik at $K < M$.

(3) Kompletthetsprinsippet sier følgende:

Kompletthetsprinsippet. *Alle ikke-tomme, oppad begrensede delmengder av $\mathbb{R}$ har en minste øvre skranke.*

(4) Vi har også skjæringssetningen:

Skjæringssetningen. *Dersom $a < b$ er reelle tall og $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon slik at $f(a)$ og $f(b)$ har motsatte fortegn, finnes det en $c \in (a, b)$ slik at $f(c) = 0$.*

2. Skjæring og Kompletthet

Vi har sett at kompletthetsprinsippet impliserer skjæringssetningen. I denne seksjonen skal vi vise den motsatte implikasjonen.

Teorem 2.1. *Skjæringssetningen medfører kompletthetsprinsippet.*

Anta at vi har skjæringssetningen til disposisjon, men for motsigelse at kompletthetsprinsippet ikke holder. La $A \subseteq \mathbb{R}$ være en ikke-tom og oppad begrenset mengde som ikke har en minste øvre skranke. Vi skal utlede en motsigelse.

La $\mathcal{M}$ betegne mengden av alle øvre skranker for A:

$$\mathcal{M} = \{M \in \mathbb{R} : a \leq M \text{ for alle } a \in A\}.$$

La funksjonen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være definert ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \in \mathcal{M} \\ -1 & \text{hvis } x \notin \mathcal{M} \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Med andre ord, $f(x) = 1$ hvis $x \in \mathbb{R}$ er en øvre skranke for A, og $f(x) = -1$ ellers.

Påstand. *f er kontinuerlig.*

Bevis. La $x \in \mathbb{R}$. Vi skal vise at f er kontinuerlig i x og skiller mellom tilfellene hvor x er eller ikke er en øvre skranke for A:

(1) Anta først at x er en øvre skranke for A. Per antakelse har A ingen *minste* øvre skranke, og vi finner derfor $y < x$ som også er en øvre skranke for A. Da må alle $t > y$ være øvre skranker for A: for gitt en slik $t > y$ må vi ha at $a \leq y < t$ for alle $a \in A$. Det følger at $f(t) = 1$ for alle $t > y$ og dermed at f er kontinuerlig i x (hvorfor?).

(2) Anta nå at x ikke er en øvre skranke for A og bruk dette til å velge $a_0 \in A$ slik at $x < a_0$. Dersom $t < a_0$, er t ingen øvre skranke for A, slik at $f(t) = -1$ for slike t. Det følger at f er kontinuerlig i x (hvorfor?). ■

Vi skal nå finne et passende intervall hvortil vi skal restriktere f og utlede en motsigelse ved appell til skjæringssetningen.

Per antakelse er $A \neq \emptyset$, og vi lar $a_0 \in A$. La deretter $x < a_0$, og velg en øvre skranke y for A. Da er $x < a_0 \leq y$ slik at $x < y$. Vi observerer:

(1) $f(x) = -1$ ettersom x ikke er en øvre skranke for A;

(2) $f(y) = 1$ ettersom y er en øvre skranke for A;

(3) f er kontinuerlig på det lukkede og begrensede intervallet $[x, y]$.

Ved skjæringssetningen følger det at det finnes $c \in (x, y)$ slik at $f(c) = 0$, hvilket er en motsigelse ettersom f kun tar verdiene 1 og -1, og ingen andre.

Beviset er komplett.