Komplekse n-tupler (seks. 1.3)

Reelle n-tupler: $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ $a_i \in \mathbb{R}$.

Samling av alle reelle n-tupler $\mathbb{R}^n$.

Komplekse n-tupler: $\vec{a} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, $z_i \in \mathbb{C}$

Samling av alle komplekse n-tupler $\mathbb{C}^n$.

Eksempel: $\vec{a} = (2i, 1-i, 2+i)$

$\vec{b} = (3, 3-2i, -4i)$

Operasjoner: $\vec{a} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, $\vec{b} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$

$\vec{a} + \vec{b} = (z_1 + w_1, z_2 + w_2, \dots, z_n + w_n)$

$\vec{a} - \vec{b} = (z_1 - w_1, z_2 - w_2, \dots, z_n - w_n)$

$u\vec{a} = (uz_1, uz_2, \dots, uz_n)$

For reelle n-tupler: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

For komplekse n-tupler: $|\vec{z}| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2}$

For reelle n-tupler: $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$

Ønsker oss en tilsvarende formel for komplekse n-tupler:

$\vec{z} = (z_1, \dots, z_n)$, $\vec{w} = (w_1, \dots, w_n)$

Vi definerer

$$\vec{z} \cdot \vec{w} = z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} + \dots + z_n\overline{w_n}$$

$z \cdot \overline{z} = |z|^2$

Da er

$$\vec{z} \cdot \vec{z} = z_1 \cdot \overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + \dots + z_n\overline{z_n}$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 = |\vec{z}|^2$$

Dermed $\vec{z} \cdot \vec{z} = |\vec{z}|^2$.

Konsekvenser: (i) $(u\vec{z}) \cdot \vec{w} = u(\vec{z} \cdot \vec{w})$

(ii) $\vec{z} \cdot (u\vec{w}) = \overline{u}(\vec{z} \cdot \vec{w})$

(iii) $\vec{z} \cdot \vec{w} = \overline{\vec{w} \cdot \vec{z}}$

Bevis for (iii): $\overline{\vec{w} \cdot \vec{z}} = \overline{w_1\overline{z_1} + w_2\overline{z_2} + \dots + w_n\overline{z_n}}$

$= \overline{w_1\overline{z_1}} + \overline{w_2\overline{z_2}} + \dots + \overline{w_n\overline{z_n}}$

$= \overline{w_1}\,\overline{\overline{z_1}} + \overline{w_2}\,\overline{\overline{z_2}} + \dots + \overline{w_n}\,\overline{\overline{z_n}}$, where $\overline{\overline{z_1}} = z_1$, $\overline{\overline{z_2}} = z_2$, $\overline{\overline{z_n}} = z_n$

$= z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} + \dots + z_n\overline{w_n} = \vec{z} \cdot \vec{w}$

Kryssprodukt (seksj 1.4)

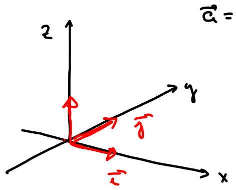
Kryssproduktet finnes bare i $\mathbb{R}^3$.

To definisjoner:

Algebraisk definisjon: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$



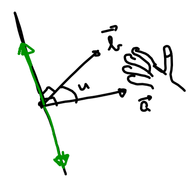
Def: $\vec{a} \times \vec{b} =$

$$(a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

$$\begin{array}{cccccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

Geometrisk definisjon:



$\vec{a} \times \vec{b}$ står normalt på både $\vec{a}$ og $\vec{b}$

Lengden til $\vec{a} \times \vec{b}$ er $|\vec{a}||\vec{b}| \sin u$ (der u er vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$)

Retningen til $\vec{a} \times \vec{b}$ er gitt av høyrehåndsregelen.

Fire bruksområder:

(i) Finne en felles normal til $\vec{a}$ og $\vec{b}$

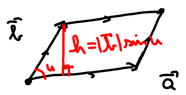
(ii) Regne ut arealer til parallellogrammer og trekanter.

(iii) —— " —— volumer

(iv) Finne ligninger for plan

(v) Formulere fysiske lover.

Arealer:



Areal utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$

$A = |\vec{a}| \cdot h = |\vec{a}||\vec{b}| \sin u$

$= |\vec{a} \times \vec{b}|$

Eksempel: Regn ut arealet til parallellogrammet utspent av

$\vec{a} = (3,-1,4)$, $\vec{b} = (2,0,-1)$.

Regne ut $\vec{a} \times \vec{b}$:

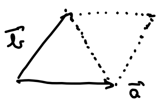
$$\begin{array}{cccccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 4 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \end{array}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = ((-1)(-1) - 4 \cdot 0)\vec{i} + (4 \cdot 2 - 3(-1))\vec{j} + (3 \cdot 0 - (-1) \cdot 2)\vec{k}$$

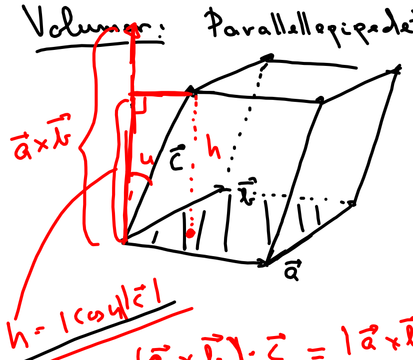
$$= 1\vec{i} + 11\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\text{Areal} = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{1^2 + 11^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 121 + 4} = \underline{\underline{\sqrt{126}}}$$

Trekant utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$: Areal $= \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$



Volumer: Parallellepipedet utspent av $\vec{a}, \vec{b}$ og $\vec{c}$



Volum = grunnflate × høyde

$= |\vec{a}\times\vec{b}| \cdot$ høyden

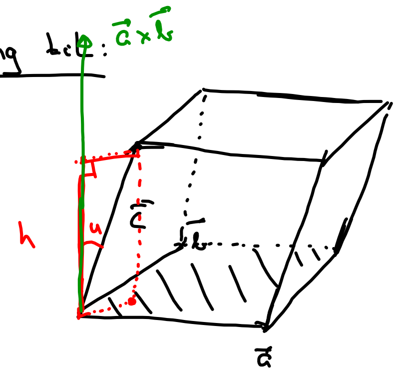
$= |\vec{a}\times\vec{b}|\,|\vec{c}|\cos u|$

$= |(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\,|$

$h = |\cos u|\,|\vec{c}\,|$

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = |\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos u$

En gang til:



$V =$ grunnflate × høyde

$= |\vec{a}\times\vec{b}|\,|\vec{c}|\cos u$

$= |(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\,|$

$h = |\vec{c}\,|\cos u$

$\vec{x}\cdot\vec{y} = |\vec{x}|\,|\vec{y}|\cos v$

Eksempel: Regn ut volumet til parallellepipedet utspent av:

$\vec{a} = (2,-1,0)$, $\vec{b} = (3,0,2)$, $\vec{c} = (5,2,1)$

$V = |(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\,|$

$\vec{a}\times\vec{b}$

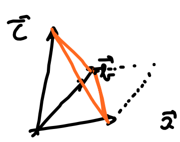
$\vec{i}$	j	k	i	j	k
2	-1	0	2	-1	0
3	0	2	3	0	2

$\vec{a}\times\vec{b} = -2\vec{i} - 4j + 3\vec{k} = (-2,-4,3)$

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (-2,-4,3)(5,2,1) = -10-8+3 = \underline{\underline{-15}}$

$V = |(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\,| = \underline{15}$

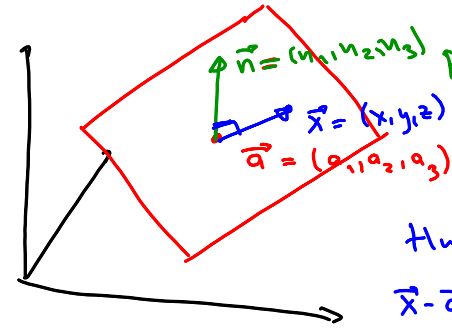
Pyramiden/tetraedret utspent av $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$



Volum $= \frac{1}{3} g\,h = \frac{1}{6}$ volum (par. epiped)

$= \frac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\,|$

Plan:



Planet gjennom $\vec{a}$ med normalvektor $\vec{n}$.

Hvis $\vec{x}$ ligger i planet, står $\vec{x} - \vec{a}$ normalt på $\vec{n}$:

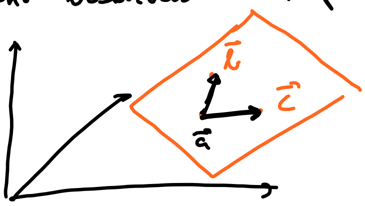
$$(\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot \vec{n}$$

$$(x, y, z) \cdot (n_1, n_2, n_3) = (a_1, a_2, a_3)(n_1, n_2, n_3)$$

$$\underline{n_1 x + n_2 y + n_3 z = n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3}$$

Alternativ beskrivelse av et plan: Planet gjennom (a, b, c).



$\vec{c} - \vec{a}$ og $\vec{b} - \vec{a}$ ligger i planet. $\vec{n}$ vil stå normalt på både $\vec{c} - \vec{a}$ og $\vec{b} - \vec{a}$.

Aha: $\vec{n} = (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})$

fortsett som før.

Eksempel: Finn formelen for planet gjennom

$\vec{a} = (1, -1, 0)$, $\vec{b} = (3, 2, 1)$ $\vec{c} = (2, -1, 1)$

Vi har $\vec{b} - \vec{a} = (2, 3, 1)$. $\vec{c} - \vec{a} = (1, 0, 1)$

$(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})$:

$$\begin{array}{cccccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\vec{n} = 3\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k} \quad \text{(normalvektor)}$$

Formel for plan med normalvektor $n = (3, -1, -3)$ gjennom $\vec{a} = (1, -1, 0)$

$$3x - y - 3z = 3 \cdot 1 + (-1)(-1) + (-3) \cdot 0$$
$$= 4$$

$$\underline{3x - y - 3z = 4}$$