MAT 1100 02.09.2021 KAP. 3.5.

ALGEBRAENS FUNDAMENTALTEOREM

- Løsning av polynomligninger
- $\mathbb{C}$
- Faktorisering av polynomer
- Komplekse polynomer
- Reelle polynomer

BAKGRUNN

Ligning	Løsning
$x + 7 = 0$	$x = -7 \in \mathbb{Z}$
$5x + 3 = 0$	$x = -\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$
$x^2 - 2 = 0$	$x = \pm\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

VGS: $ax^2 + bx + c = 0$ $\quad a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

I : $b^2 - 4ac > 0$ To forskjellige reelle løsn. r_1, r_2

$a(x - r_1)(x - r_2)$

II : $b^2 - 4ac = 0$ Én reell løsn r

$a(x-r)^2$

III : $b^2 - 4ac < 0$

$az^2 + bz + c = 0$ To komplekse løsn r, s

$s = \bar{r}$

$a(z - r)(z - \bar{r})$

IV $az^2 + bz + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$

samme løsn. formel

Kvadratrot av komplekse tall $b^2 - 4ac \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

To komplekse løsn. r_1, r_2

$a(z - r_1)(z - r_2)$

KOMPLEKSE POLYNOMER

DEF:

- Et komplekst n-te grads polynom er et uttrykk på formen
$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0$$
med $c_n, c_{n-1}, \dots, c_1, c_0 \in \mathbb{C}$.

- Et komplekst tall r kalles en rot (nullpunkt) til polynomet P dersom $P(r) = 0$.

OBS: Røttene til P $\leftrightarrow$ løsningene til $P(z) = 0$

3.5.1 ALGEBRAENS FUNDAMENTALTEOREM

La $P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0$
være et komplekst n-te grads polynom.
Da fins komplekse tall $r_1, r_2, \dots, r_n$ slik at

$$P(z) = c_n (z - r_1)(z - r_2)\cdots(z - r_n).$$

Entydig opp til rekkefølge.

OBS! Noen av røttene kan være like
$r_1, \dots, r_j$ ulike røtter
$m_1, \dots, m_j$ ganger (multiplisitet)

- $P(z) = c_n (z - r_1)^{m_1} \cdots (z - r_j)^{m_j}$ der $m_1 + \dots + m_j = n$.

KONKLUSJON :
- Et n-te grads polynom har n røtter
- En n-te grads ligning har n løsninger
- $\mathbb{C}$

BEVIS : (Argand 1806) 5.5 * (* = ikke pensum)
I. Induksjon på graden til polynomet.
II. Grunntilfellet - at det finnes en rot
- kontinuitet av komplekse polynomfunksjoner
- konvergens av følger av komplekse tall
- polynomet har en minimalverdi

EKS.

$r_1 = -1 \qquad r_2 = i$

$m_1 = 2 \qquad m_2 = 1$

$$(z-(-1))^2(z-i) = (z+1)^2(z-i)$$
$$= (z^2+2z+1)(z-i)$$
$$= z^3 + 2z^2 + z - iz^2 - i\cdot 2z - i$$
$$P(z) = \underline{\underline{z^3 + (2-i)z^2 + (1-2i)z - i}}$$

Sjekk at -1 er en rot:

$$P(-1) = (-1)^3 + (2-i)(-1)^2 + (1-2i)(-1) - i$$
$$= -1 + 2 - i - 1 + 2i - i$$
$$= \underline{0}$$, så -1 er en rot.

Sjekk at i er en rot:

$$P(i) = i^3 + (2-i)i^2 + (1-2i)i - i \qquad i^2 = -1$$
$$= -i - 2 + i + i + 2 - i$$
$$= \underline{0}$$

REELLE POLYNOMER

DEF: Et n-te grads polynom

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0$$

kalles <u>reelt</u> dersom $c_n, c_{n-1}, \dots, c_1, c_0 \in \mathbb{R}$

3.5.3 LEMMA
Hvis P er et reelt polynom med en kompleks rot r $(r \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$, så er $\bar{r}$ også en rot.

EKS

$$P(z) = z^2 + 1$$
$$P(i) = i^2 + 1 = 0.$$
$$P(-i) = (-i)^2 + 1 = (-1)^2 (i)^2 + 1 = -1 + 1 = 0.$$
$$(-i)^2 = (-1 \cdot i)^2 = (-1)^2 \cdot i^2$$
$$P(z) = (z-i)(z+i)$$

BEVIS Siden r er en rot, $P(r) = 0$

$$0 = c_n r^n + c_{n-1} r^{n-1} + \dots + c_1 r + c_0$$

Konjugerer:

$$\bar{0} = \overline{c_n r^n + c_{n-1} r^{n-1} + \dots + c_1 r + c_0}$$
$$0 = \overline{c_n r^n} + \overline{c_{n-1} r^{n-1}} + \dots + \overline{c_1 r} + \overline{c_0}$$
$$0, c_n, c_{n-1}, \dots, c_1, c_0 \in \mathbb{R}$$
$$= \overline{c_n} \cdot \bar{r}^n + \overline{c_{n-1}} \cdot \bar{r}^{n-1} + \dots + \overline{c_1} \cdot \bar{r} + \overline{c_0}$$
$$= c_n \bar{r}^n + c_{n-1} \bar{r}^{n-1} + \dots + c_1 \bar{r} + c_0$$

$P(\bar{r}) = 0$ $\quad$ $\bar{r}$ er en rot i P. ∎

3.5.4 LEMMA
To konjugerte røtter til et reelt polynom $P(z)$ har alltid samme multiplisitet.

BEVIS (SKISSE)

OBS: $r = a + ib \qquad \bar{r} = a - ib \quad , \; a, b \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
(z-r)(z-\bar{r}) &= z^2 - \bar{r}z - rz + r\bar{r} \\
&= z^2 - (\bar{r}+r)z + r \cdot \bar{r} \\
&= \underbrace{z^2 - 2az + a^2 + b^2}
\end{aligned}
$$

$r\bar{r} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$

Et reelt annengradspolynom

- Dele $P(z)$ med dette så mange ganger som både r og $\bar{r}$ er røtter $\rightarrow$ $Q(z)$ reelt polynom.
- Det ville motsi 3.5.3 hvis en kompleks rot r var rot i $Q(z)$, men ikke $\bar{r}$ ∎

3.5.5 KOROLLAR
Ethvert reelt polynom av odde grad har (minst) én reell rot.

OPPGAVE 3.5.4

$$P(z) = z^3 + 2z^2 + z + 2$$

- Skal vise at $r_1 = -2$ er en rot:

$$P(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 + (-2) + 2$$
$$= -8 + 8 - 2 + 2$$
$$= \underline{0}.$$

- Vet at $(z-(-2)) = (z+2)$ er en faktor i $P(z)$

Polynomdivisjon

$$z^3 + 2z^2 + z + 2 : z + 2 = \underline{z^2 + 1}$$
$$-(z^3 + 2z^2)$$
$$z + 2$$
$$-(z+2)$$
$$0$$

- $\underline{P(z) = (z+2)(z^2+1)}$ Reell faktorisering (lineære faktorer, andengradsfaktorer og kun reelle koeffisienter)

- $z^2 + 1 = 0$

$z^2 = -1$ (formel for annengradslikn)

$\underline{z = \pm i}$

$\underline{r_2 = i}$ $\underline{r_3 = -i}$

- $P(z) = \underline{(z+2)(z-i)(z+i)}$ Komplekse faktorisering (Bare lineære faktorer, tillater komplekse koeffisienter)

3.5.6 SETNING

Ethvert reelt n-te grads polynom $P(z)$ kan skrives som et produkt av reelle første- og annengradspolynomer:

$$P(z) = C_n(z-r_1)\cdots(z-r_j)(z^2+a_1z+b_1)\cdots(z^2+a_kz+b_k)$$

ny j

Notasjon som i boka

der $r_1, \ldots, r_j, a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$.

EKS: $P(z) = z^4 - 2z^3 + 5z^2 - 2z + 4$

- Skal vise at i er en rot:

$$\begin{aligned} P(i) &= i^4 - 2i^3 + 5i^2 - 2i + 4 \\ &= (i^2)^2 - 2i^2 \cdot i - 5 - 2i + 4 \\ &= (-1)^2 + 2i - 5 - 2i + 4 \\ &= 0. \end{aligned}$$

- Siden $P(z)$ er reelt, må $-i$ også være en rot.
- Dermed er $(z-i)(z+i) = z^2+1$ en faktor i $P(z)$.
- Polynomdivisjon: $z^4 - 2z^3 + 5z^2 - 2z + 4 : z^2+1 = \underline{z^2 - 2z + 4}$

$$\begin{array}{r} z^4 - 2z^3 + 5z^2 - 2z + 4 \\ -(z^4 + z^2) \\ \hline -2z^3 + 4z^2 - 2z + 4 \\ -(-2z^3 - 2z) \\ \hline 4z^2 + 4 \\ -(4z^2 + 4) \\ \hline 0 \end{array}$$

- Ser på $z^2 - 2z + 4 = 0$ $\qquad b^2 - 4ac = (-2) - 4 \cdot 1 \cdot 4 < 0$

$$\begin{aligned} z &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} \qquad -12 = -1 \cdot 2^2 \cdot 3 \\ &= \frac{2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} \\ &= \underline{1 \pm i\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\underline{z^2 - 2z + 4 = (z - 1 + i\sqrt{3})(z - 1 - i\sqrt{3})}$$

- $\underline{P(z) = (z^2+1)(z^2 - 2z + 4)}$ Reelle faktorisering
- $\underline{P(z) = (z-i)(z+i)(z - 1 + i\sqrt{3})(z - 1 - i\sqrt{3})}$ Komplekse faktorisering.