Skumle ting om vektorproduktet

$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$ $\qquad$ $\vec{a} \times \vec{b}$ $\qquad$ $|\vec{a}||\vec{b}| \sin u$

$\vec{b} \times \vec{a}$

Istedenfor $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

Eksempel: $(\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{j}$ $\qquad$ $\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j})$

$(\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{j} = \vec{0} \times \vec{j} = \vec{0}$

$\vec{i} \times \underbrace{(\vec{i} \times \vec{j})}_{\vec{k}} = \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$

Konsekvens: Du skal aldri skrive $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$, men enten $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ eller $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

Matriser (seks. 1.5)

En <u>m×n</u> - <u>matrise</u> el rektangulært oppsett av tall med m rader (linjer) og n søyler (kolonner)

$$\text{m rader}\left\{\begin{array}{l} \underbrace{\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & & & & & & \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ \end{matrix}}_{\text{n søyler}} \end{array}\right.$$

<u>Eksempel:</u> 2×3 - matrise: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & \pi & -\frac{17}{2} \end{pmatrix}$ 2 rader 3 søyler

3×2 - matrise $B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -20 \\ 17 & 37 \\ -\frac{\sqrt{5}}{4} & e \end{pmatrix}$ 3 rader 2 søyler

<u>Notasjon:</u> m×n-matrise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} er elementet i i-te rad og j-te søyle

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} & \text{i-te rad} \\ \text{j-te søyle} & \end{array}$$

<u>To spesialtilfeller:</u>

$1 \times n$ - matrise $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$ <u>radvektor</u>

$m \times 1$ - matrise $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ <u>søylevektor</u>

Regneoperasjoner

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Adderer komponentvis:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Subtraksjon

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ \vdots & & & \\ \cdots & & & \end{pmatrix}$$

Multiplikasjon med skalar

$$sA = \begin{pmatrix} sa_{11} & sa_{12} & \cdots & sa_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Transposisjon:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad m \times n\text{-matrise}$$

Bytter om rader og linjer.

"A transponert" $$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & & a_{m2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad n \times m\text{-matrise}$$

Eksempel: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 2×3-matriser

$$(A+3B)^T = \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right)^T$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 0 & 12 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \right)^T$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -1 & 15 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ -1 & 6 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hva skal matriser brukes til? Til å transformere vektorer (blant annet).

Eksempel: En bærforhandler får forsyninger fra dyrkere A, B, C

	A	B	C
Bringebær	30 %	40 %	10 %
Jordbær	50 %	20 %	70 %
Rips	20 %	40 %	20 %

A leverer 2 tonn
B leverer 3 tonn
C leverer 1 tonn

Hvor mye bringebær, hvor mye jordbær og hvor mye rips får forhandleren?

$$\begin{aligned}
\text{Bringebær:}\quad & 0{,}3\cdot 2 + 0.4\cdot 3 + 0.1\cdot 1 = 1.9 \\
\text{Jordbær:}\quad & 0{,}5\cdot 2 + 0.2\cdot 3 + 0.7\cdot 1 = 2.3 \\
\text{Rips:}\quad & 0.2\cdot 2 + 0.4\cdot 3 + 0.2\cdot 1 = 1.8
\end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} 1.9 \\ 2.3 \\ 1.8 \end{pmatrix}$

prikkprodukt mellom 1. linje i M og $\vec{a}$

prikkprodukt mellom 2. linje i M og $\vec{a}$

prikkprodukt mellom 3. linje i M og $\vec{a}$.

$$M = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & 0.7 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

"M transformerer informasjon om hvor mye vi får fra hver dyrker til informasjon om hvor mye vi får av hver bærtype."

Definisjonen: Anta at

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

er en $m \times n$ - matrise og $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ er en søylevektor med n komponenter.

Da definerer vi $A\vec{x}$ til å være en søylevektor med m komponenter:

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Hvordan tenker vi på dette? A transformerer vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ til en ny vektor $\vec{y} = A\vec{x} \in \mathbb{R}^m$

Eksempel: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 2×3 - matrise

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 + 3(-1) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}}}$$

Noen regneregler:

$$A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$$

$$(A+B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x}$$

$$(sA)\vec{x} = s(A\vec{x})$$

$$A(s\vec{x}) = s\,A\vec{x}$$

Multiplikasjon av matriser (seksjon 1.6)

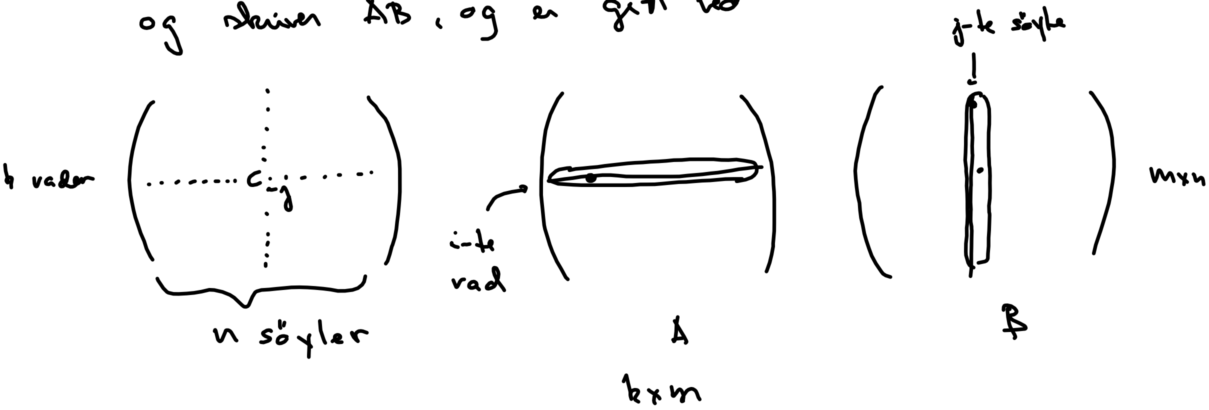
B er en $m \times n$-matrise $\qquad \underset{\mathbb{R}^m}{\vec{y}} = B \underset{\mathbb{R}^n}{\vec{x}} \qquad \underset{\mathbb{R}^k}{z} = A \underset{\mathbb{R}^m}{\vec{y}}$

A er en $k \times m$-matrise

$$\begin{tikzcd} \underset{\mathbb{R}^n}{\vec{x}} \arrow[r, "B"] \arrow[rr, bend right] & \underset{\mathbb{R}^m}{\vec{y} = B\vec{x}} \arrow[r, "A"] & \underset{\mathbb{R}^k}{A\vec{y} = A(B\vec{x}) = \vec{z}} \end{tikzcd}$$

To transformasjoner etter hverandre gir en sammensatt transformasjon $\vec{x} \to \vec{z}$. Finnes det en $k \times n$-matrise C som gir direkte fra $\vec{x}$ til $\vec{z}$, dvs $\vec{z} = C\vec{x}$.

Ja, det gjør det! Denne matrisen C kalles for produktet av AB og skrives AB, og er gitt ved



$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj}$$

Eksempel: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 2×3-matrise $\qquad (2 \times \cancel{3}) \cdot (\cancel{3} \times 2) = 2 \times 2$

$B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ 3×2-matrise

$$AB = \begin{pmatrix} 2(-2) + 3\cdot 3 + 4\cdot 2 & 2\cdot 4 + 3\cdot 1 + 4\cdot 7 \\ -4 + 9 + 8 & 8 + 3 + 28 \\ (-1)(-2) + 0\cdot 3 + 2\cdot 2 & -1\cdot 4 + 0\cdot 1 + 2\cdot 7 \\ 2 + 0 + 4 & -4 + 0 + 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 39 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Regneregler:

$$(A+B)C = AC+BC$$

$$A(B+C) = AB+AC$$

$$(AB)C = A(BC)$$

Vanligvis er $\underline{AB \neq BA}$!

$m = n = k$

$$\underset{m\times n}{A} \quad \underset{n\times k}{B}$$

$$\underset{n\times k}{B} \quad \underset{m\times n}{A}$$

Eksempel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 0 & 1\cdot 3 + 2\cdot 1 \\ 1\cdot 2 + 3\cdot 0 & 1\cdot 3 + 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot 1 & 2\cdot 2 + 3\cdot 3 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 1 & 0\cdot 2 + 1\cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}}$$