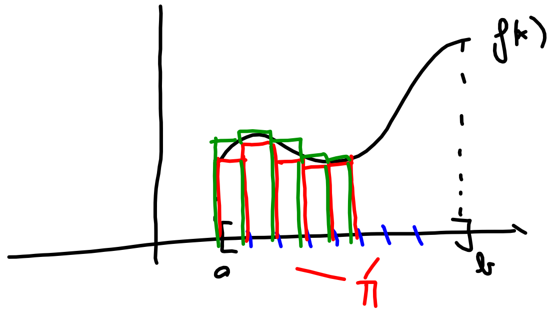
Integrasjon

Fra forrige gang:

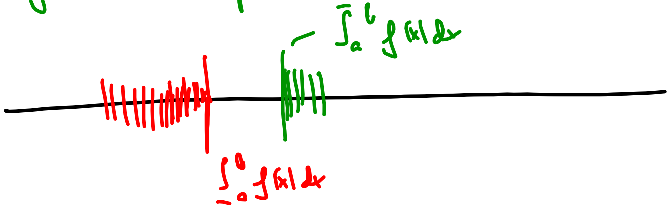


$N(\Pi)$ = areal av røde bokser

$\Phi(\Pi)$ = areal —"— grønne bokser.

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{N(\Pi) : \Pi \text{ en partisjon}\}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{\Phi(\Pi) : \text{—"—}\}$$



Funksjonen f er integrerbar over intervallet $[a,b]$ dersom $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, og i så fall definerer vi integralet ved

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx .$$

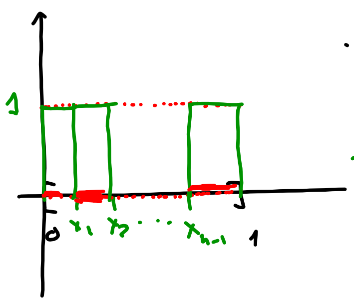
Eksempel: Definer $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ er rasjonal} \\ 1 & x \text{ er irrasjonal} \end{cases}$$

f er ikke integrerbar:

$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = \underline{0}$

$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 1$



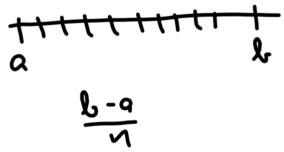
$\longrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \Phi(\Pi) = 1 \\ N(\Pi) = 0 \end{array}\right\}$ for alle partisjoner

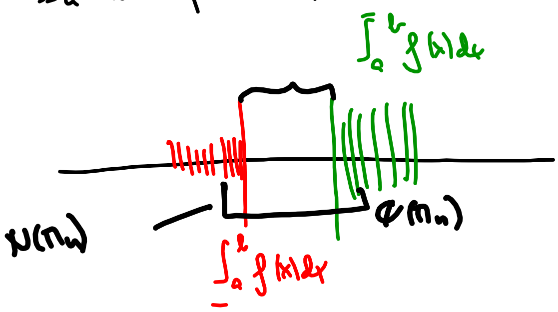
$$\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = \underline{1} \qquad \underline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0 \qquad f \text{ er ikke integrerbar.}$$

Lemma: Dersom det finnes partisjoner Π_n slik at

$$\lim_{n\to\infty} \left(\Phi(\Pi_n) - N(\Pi_n) \right) = 0,$$

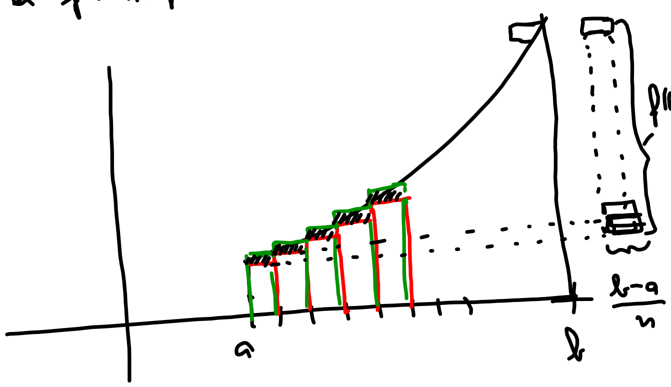
så er f integrerbar.





Teorem: Hvis $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er monoton (dvs. enten voksende eller avtagende), så er f integrerbar.

Bevis:



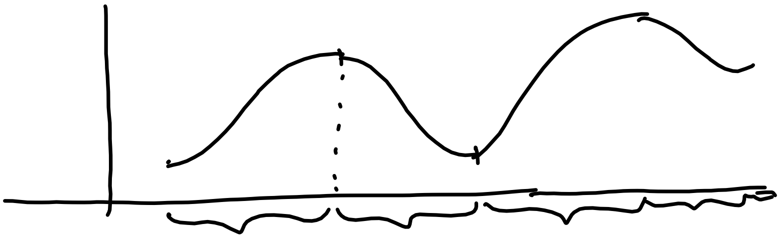
Π_n, $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$

$\frac{b-a}{n}\left(f(b)-f(a)\right)$

$$\Phi(\Pi_n) - N(\Pi_n) = \left(f(b) - f(a)\right)\frac{b-a}{n} \longrightarrow 0$$

Ifølge lemmaet er f integrerbar.

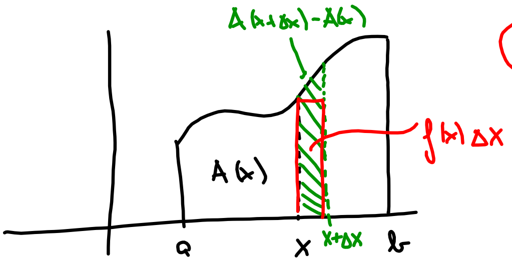
Stykkevis monotone funksjoner er integrerbar.



Analysens fundamentalteorem.

Spørsmål: 1. Er alle kont. funksjoner integrerbare
2. Hvorfor kan vi løse integraler med antiderivasjon.

Intuitiv idé om sammenhengen: Prøver å derivere $A(x)$.



$$\frac{\overbrace{A(x+\Delta x)-A(x)}^{\approx f(x)\Delta x}}{\Delta x} \to f(x)$$

$$\downarrow$$

$$A'(x)$$

Altså $A'(x) = f(x)$

$A(x+\Delta x) - A(x) \approx f(x)\Delta x \leftarrow$

med bedre tilnærming jo mindre Δx er

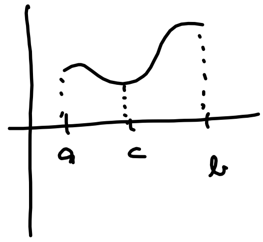
Oppdrag: Gjøre dette presis!

Lemma: Anta at $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ er begrenset og at $c \in (a,b)$. Da

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx$$

og

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx.$$



Definisjon: Anta at $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon.

Vi kaller $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ en antiderivert til f dersom F er kontinuerlig og $F'(x) = f(x)$ i alle $x \in (a,b)$.

Setning: Anta at $F(x)$ og $G(x)$ er to antideriverte til $f(x)$ på $[a,b]$. Da er $F(x) = G(x) + C$ for en konstant C.

Bevis: La $H(x) = F(x) - G(x)$. Da

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Vi har tidligere vist at en funksjon med derivert 0 er en konstant

så $H(x) = C$, dvs

$$F(x) - G(x) = C \Rightarrow \underline{F(x) = G(x) + C}$$

Det

Analysens fundamentalteorem: Anta $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon. Da er f integrerbar på alle intervaller $[a,x]$, der $a\le x\le b$, og funksjonen

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

er en antiderivert til f.

Bevis: La

$$G(x)=\overline{\int_a^x} f(t)\,dt$$
$$H(x)=\underline{\int_a^x} f(t)\,dt.$$

Vi skal først vise at disse er antideriverte til $f(x)$. Ser på $G(x)$:

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x}=\lim\frac{\overline{\int_a^{x+\Delta x}} f(t)\,dt-\overline{\int_a^x} f(t)\,dt}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overline{\int_x^{x+\Delta x}} f(t)\,dt}{\Delta x}$$

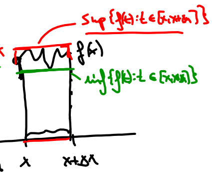
må vise at denne er lik $f(x)$.

Vet fra lemmaet

$$\overline{\int_a^{x+\Delta x}} f(t)\,dt=\overline{\int_a^x} f(t)\,dt+\overline{\int_x^{x+\Delta x}} f(t)\,dt$$

Ser på dette for $\Delta x>0$

$$\inf\{f(t):\dots\}\,\Delta x\le\overline{\int_x^{x+\Delta x}} f(t)\,dt\le\sup\{f(t):\dots\}\,\Delta x$$



$$\inf\{f(t):t\in[x,x+\Delta x]\}\le\frac{\overline{\int_x^{x+\Delta x}} f(t)\,dt}{\Delta x}\le\sup\{f(t):t\in[x,x+\Delta x]\}$$

$$\downarrow\qquad\qquad\downarrow\qquad\qquad\downarrow$$
$$f(x)\qquad\quad f(x)\qquad\quad f(x)$$

Skviseloven.

Dermed har vi at $G'(x)=\lim\frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x}=f(x)$, så G er en antiderivert til f. På samme måte kan vi vise at $H'(x)=f(x)$. Dette betyr at

$$G(x)=H(x)+C$$

Men $G(a)=H(a)=0$, så $C=0$. Dermed er $H(x)=G(x)$, dvs

$$\overline{\int_a^x} f(t)\,dt=\underline{\int_a^x} f(t)\,dt\ ,\quad\text{dvs at } f \text{ er integrerbar på}$$

$[a,x]$ og at

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt=\underbrace{\overline{\int_a^x} f(t)\,dt}_{G(x)}=\underbrace{\underline{\int_a^x} f(t)\,dt}_{H(x)}$$

og dermed

$$F'(x)=G'(x)=f(x).$$

Analysens fundamentalteorem (del 2): Anta at $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er kontinuerlig og at K er en antiderivert til f på $[a,b]$. Da

$$\int_a^b f(x)\,dx=K(b)-K(a)=\left[K(x)\right]_a^b$$

Bevis: Vet at $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ er en antiderivert til $f(x)$. Siden $F(x)$ og $K(x)$ begge er antideriverte til $f(x)$, så

$F(x)=K(x)+C$ for en konstant C. Vi har

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)=F(b)-\overset{0}{F(a)}=(K(b)+\cancel{C})-(K(a)+\cancel{C})$$

$$=K(b)-K(a)$$

Eksempel: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\arctan x\right]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$

Eksempel: $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \left[-\cot(x)\right]_{\pi/6}^{\pi/3}$

$$= -\cot\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{3}\sqrt{3}}}$$

Legg merke til at

$$\frac{d}{dx}\Big(\underbrace{\int_a^x f(t)\,dt}_{\text{antiderivert til } f(x).}\Big) = f(x)$$

Eksempel: Finn den deriverte til $\underline{\underline{G(x) = \int_0^{\sin^2 x} e^{t^2}\,dt}}$.

Vi vet

$$F(u) = \int_0^u e^{t^2}\,dt \text{, så } F'(u) = \underline{\underline{e^{u^2}}}.$$

Men

$$\underline{\underline{G(x)}} = \int_0^{\sin^2 x} = \underline{\underline{F(\sin^2 x)}}$$

Ved kjerneregelen:

$$G'(x) = F'(\sin^2 x)\cdot\underbrace{2\sin x\cdot\cos x}_{(\sin^2 x)'}$$

$$= e^{(\sin^2 x)^2}\cdot 2\sin x\cos x = \underline{\underline{e^{\sin^4 x}\cdot 2\sin x\cos x}}$$