Multiplikasjon av matriser

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ - matrise $\qquad$ $n \times k$ - matrise

$$C = AB$$

i-te rad $\qquad$ j-te søyle

$$\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} = \underset{A}{\begin{pmatrix} \text{---} \end{pmatrix}} \underset{B}{\begin{pmatrix} | \end{pmatrix}}$$

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$

Transformasjoner

$$\begin{array}{ccccc} \vec{x} & \longrightarrow & \vec{y} = B\vec{x} & \longrightarrow & A\vec{y} = A(B\vec{x}) = z \\ \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\ \mathbb{R}^k & & \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^m \end{array}$$

$$\vec{z} = C\vec{x}$$

Oppgave 12, eksamen 2011

Tre fabrikker 1, 2, 3
To gjenvinningsanlegg A, B

	1	2	3
A	0.4	0.3	0.6
B	0.3	0.5	0.3

Finn en matrise C slik at hvis fabrikkene 1, 2, 3 produserer x_1, x_2, x_3 tonn kartong og

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underline{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

så er y_1 og y_2 det som returneres til hhv. A og B.

Havner hos A: $y_1 = 0.4x_1 + 0.3x_2 + 0.6x_3$

Havner hos B: $y_2 = 0.3x_1 + 0.5x_2 + 0.3x_3$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.6 \\ 0.3 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Finn en matrise D slik at hvis y_1, y_2 er det som sendes tilbake fra gjenvinning til fabrikken, så er

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

der z_1, z_2, z_3 er det hver av fabrikkene mottar.

	A	B
fabrikk 1	40%	20%
-"- 2	20%	50%
-"- 3	40%	30%

$z_1 = 0.4y_1 + 0.2y_2$

$z_2 = 0.2y_1 + 0.5y_2$

$z_3 = 0.4y_1 + 0.3y_2$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}}_{D} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Regn ut DC:

$$DC = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}}_{3\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.6 \\ 0.3 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}}_{2\times 3}$$

stemmer

Skal ha 3x3-matrise

$$DC = \begin{pmatrix} 0.4\cdot 0.4 + 0.2\cdot 0.3 & 0.4\cdot 0.3 + 0.2\cdot 0.5 & 0.4\cdot 0.6 + 0.2\cdot 0.3 \\ 0.2\cdot 0.4 + 0.5\cdot 0.3 & \ldots & \\ \ldots & & \end{pmatrix}$$

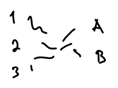
$$= \begin{pmatrix} 0.22 & 0.22 & 0.3 \\ 0.23 & 0.31 & 0.27 \\ 0.25 & 0.27 & 0.33 \end{pmatrix}$$

b) I løpet av en periode produserer fabrikkene

1: 3000 tonn 2: 4000 tonn 3: 3000 tonn

Hvor mye vil hver av fabrikkene få tilbake?

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3000 \\ 4000 \\ 3000 \end{pmatrix}$$



Retur.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = D\left(C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = DC \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \underline{DC} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = DC \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.22 & 0.22 & 0.3 \\ 0.23 & 0.31 & 0.27 \\ 0.25 & 0.27 & 0.33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3000 \\ 4000 \\ 3000 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2440 \\ 2740 \\ 2820 \end{pmatrix}$$

Regneregel: $(AB)^T = B^T A^T$

$$\begin{array}{cc} A & B \\ m \times n & n \times k \\ B^T & A^T \\ k \times \underline{n} & \underline{n} \times m \end{array}$$

Bevis:

Hva er ij-te komponent i $(AB)^T$ = ji-te komponenten i AB

= j-te rad i A ganget med i-te søyle i B.

Hva er ij-te komponent i $B^T A^T$ = i-te rad i B^T ganget med j-te søyle i A^T

= i-te søylen i B ganget med j-te rad i A.

Sammenheng med skalarprodukt

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt: $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

Matriseprodukt: $\vec{x}^T \vec{y} = \underbrace{(x_1, x_2, \dots, x_n)}_{1 \times \underline{n} \text{ matrise}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\underline{n} \times 1\text{-matrise}} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

$$\underbrace{\vec{x} \cdot \vec{y}}_{\text{skalarprodukt}} = \underbrace{\vec{x}^T \vec{y}}_{\text{matriseprodukt}}$$

Anvendelse: $(A\vec{x}) \cdot \vec{y} = (A\vec{x})^T \vec{y} = \vec{x}^T A^T \vec{y} = \vec{x}^T (A^T \vec{y})$

$$= \vec{x} \cdot (A^T \vec{y})$$

$$\boxed{(A\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (A^T \vec{y})}$$

Inverse matriser (seksjon 1.7)

Nå er alle matriser kvadratiske, $n \times n$-matriser.

Identitet og inverse:

Vanlige tall: 1 er identitet for $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

Hvis $x \neq 0$, så er $\frac{1}{x}$ en invers til x

fordi $x \cdot \frac{1}{x} = 1$

Identiteter: $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Hvis A er en annen $n \times n$-matrise, så er $AI_n = A$, $I_nA = A$.

Definisjon: Anta at A er en $n \times n$-matrise. ~~Da sies~~

Da kalles en $n \times n$-matrise B for en invers til A dersom

$AB = BA = I_n$

Setning: En $n \times n$-matrise A har høyst en invers matrise

Bevis: Anta at B og C begge er inverser: Da

$$B = B \cdot I_n = B \cdot (AC) = \underbrace{(BA)}_{I_n} \cdot C = I_n \cdot C = C.$$

Eksempel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Vi vil finne en invers matrise

$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$. Vi må ha $AB = I_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2z & y + 2u \\ 3x - z & 3y - u \end{pmatrix}$$

$x + 2z = 1 \qquad y + 2u = 0$

$3x - z = 0 \qquad 3y - u = 1$

$x + 2z = 1$

$6x - 2z = 0$

$7x$