Kapittel 3

$\overline{\left(\frac{2+i}{7-3i}\right)}$

Komplekse tall:

$z = a + ib$

$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = re^{i\vartheta}$

$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2)}$

Beskrive områder i $\mathbb{C}$:

$|z-w|$ avstanden mellom z og w.

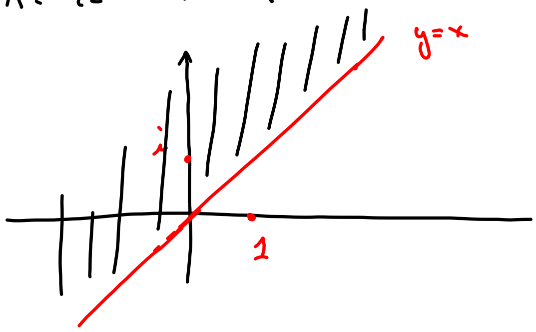
Eksamen 2018, nr 4: $A = \{ z : \underbrace{|z-1|}_{\text{avstanden fra } z \text{ til } 1} > \underbrace{|z-i|}_{\text{avstanden fra } z \text{ til } i} \}$

$A = \{z$: avstanden fra z til 1 er større enn avstanden fra z til $i\}$

$= \{z : z$ ligger over linjen $y=x\}$

$= \{z = x+iy : y > x\}$

$|z+w| = |z-(-w)|$



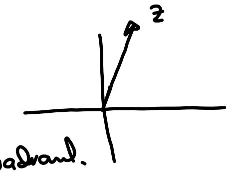
Finne røtter til komplekse tall.

Eksamen 2019, nr 12: Finn kvadratrøttene til $z = 2+2i\sqrt{3}$

$r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$

$\cos\vartheta = \frac{a}{r} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{3}$

bruker at z ligger i 1. kvadrant.



$w_0 = r^{1/2} e^{i\vartheta/2} = 4^{1/2} e^{i\pi/6} = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})$

$= \sqrt{3} + i$

$w_1 = -(\sqrt{3}+i)$

$\pm(\sqrt{3}+i)$

Algebraens fundamentalteorem:

Eksamen 2017, oppgave 5: $P(z) = \overbrace{z^3 + az^2 + bz + c}^{\text{Reelt polynom}}$ har 1 og $-i$ som røtter. Finn $P(z)$.

i er en rot.

$P(z) = (z-1)(z-(-i))(z-i) = (z-1)\overbrace{(z+i)(z-i)} = (z-1)(z^2-i^2)$

$= (z-1)(z^2+1) = z^3 + z - z^2 - 1$

$= z^3 - z^2 + z - 1$

Kapittel 4

Konvergens av følger:

Eksempel: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+n^3+4n^4}{3n^4+2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^4}\left(\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n}+4\right)}{\cancel{n^4}\left(3+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right)} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$

Eksamen 2013, nr 6: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\cancel{n}+1)-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \underline{\underline{0}}$

Mer kompliserte typer oppgaver: Gitt ε, finn N -oppgaver.

Induktivt gitt følger: $a_{n+1} = \frac{a_n^2+2}{3}$ $a_0 = 2$

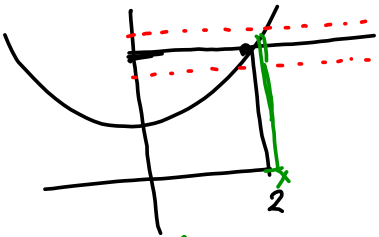
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Kapittel 5

Oppgaver: skjæringssetningen, ekstremalverdisetningen
def av kont/grense: $\varepsilon - \delta$
Skjøteoppgaven $f(x) = \begin{cases} \text{[illegible]} & \text{for } x \geq 2 \\ \text{[illegible]} & \text{for } x < 2 \end{cases}$

Eksamen 2018: $f(x) = x^2 + 1$, $\varepsilon > 0$.

Hvilke krav må vi legge på x for å sikre at $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$?



$h = x - 2$
$x = 2 + h$

$$|f(x) - f(2)| = |(x^2+1) - (2^2+1)|$$

$$= |(2+h)^2 + 1 - 4 - 1|$$

$$= |\cancel{4} + 2 \cdot 2h + h^2 + \cancel{1} - \cancel{4} - \cancel{1}| = |4h + h^2|$$

$$= \underbrace{|h|}_{< \varepsilon/5} \underbrace{|4+h|}_{\leq 5} < \varepsilon$$

Hvis $|h| < 1$, så er $|4+h| < 5$

Hvis $|h| < \frac{\varepsilon}{5}$, så er $|h| \leq \frac{\varepsilon}{5}$

Hvis $|h| < \min\{\frac{\varepsilon}{5}, 1\}$, så

$|h|\,|4+h| < \frac{\varepsilon}{5} \cdot 5 < \varepsilon$

Setter vi $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{5}, 1\}$, så vil
$|f(x) - f(2)| < \varepsilon$ når $|x-2| < \delta$

Kapittel 6

Rene derivasjonsoppgaver: $f(x) = x\arctan(x^2)$, $f'(x) = ?$

Logaritmisk derivasjon:

Definisjon: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Middelverdisetningen: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

L'Hôpitals regel: Eksamen 2016, nr 12 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(e^{\ln x}\right)^{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\sqrt{x}\ln x} = e^0 = \underline{1}$$

Mellomregning: $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1/2}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}\cdot x^{3/2}}{-\frac{1}{2}\cancel{x^{-3/2}}\cdot \cancel{x^{3/2}}}$$

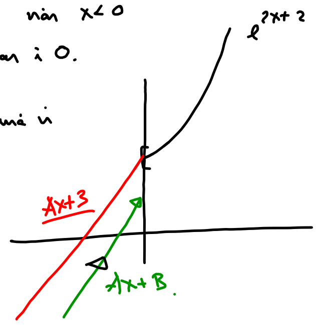
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{1/2}}{-\frac{1}{2}} = 0$$

Kurvedrøfting:

Eksamen 2017, nr 14.

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} + 2 & \text{når } x \geq 0 \\ Ax + B & \text{når } x < 0 \end{cases}$$

Finn A, B slik at f er deriverbar i 0.



For at f skal være kontinuerlig, må vi

$$\lim_{x\to 0^-}(Ax+B) = f(0) = e^{2\cdot 0} + 2 = \underline{\underline{3}}$$

$$\parallel$$

$$\underline{\underline{B}}$$

Vi må i tillegg velge A slik at funksjonen er deriverbar i 0.

Høyre derivert: $f'_+(x) = (e^{2x}+2)' = 2e^{2x}$, $f'_+(0) = 2\cdot e^{2\cdot 0} = \underline{\underline{2}}$

Venstre derivert: $f'_-(x) = (Ax+B)' = \underline{\underline{A}}$ $\quad \underline{\underline{A = 2}}$.

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} + 2 & \text{for } x \geq 0 \\ 2x + 3 & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

Eksamen 2017, oppgave 18: $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig med $f(0) = -1$, $f'(c) \geq 1$ for alle $c \in (0,1)$

(i) f er konveks ✗

(ii) f har et maksimum i $(0,1)$ ✗

(iii) f' er avtagende ✗

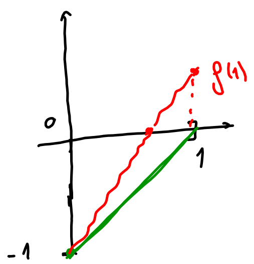
(iv) f har nøyaktig ett nullpunkt i $[0,1]$ V R

(v) f er konkav. ✗

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(c) \geq 1$$

$$f(1) - f(0) \geq 1$$

$$f(1) \geq 1 + f(0) = 0$$



Kapittel 7

Uoppstilte problemer < maks/min, koblede hastigheter.

Omvendte funksjoner

arcus-funksjoner

Eksamen 2018, nr 16:

$f(x) = x + \arctan x$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2}$

g(x) er den omvendte funksjonen

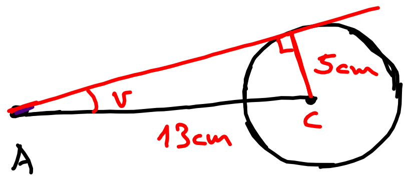
$g'(0) \stackrel{?}{=}$

$\underset{y}{0} = f(\underset{x}{0}) = 0 + \arctan 0$

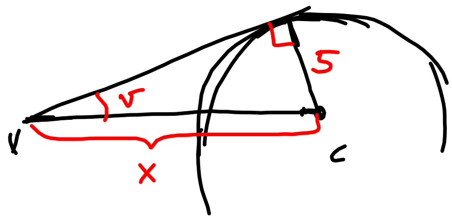
$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad y = f(x)$$

$$g'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Eksamen 2011, nr 20:



Når avstanden fra A til C er 13cm, så øker vinkelen v med 0.5 rad/sek. Hvor fort nærmer ballongen seg A i dette øyeblikket?



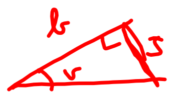
$\sin v = \frac{5}{x}$

Deriverer:

$$\cos v \cdot v' = -\frac{5}{x^2} x'(t)$$

$$x'(t) = -\frac{x^2 \cos v \cdot v'}{5}$$

$b = \sqrt{13^2 - 5^2} = \underline{\underline{12}}$



$\cos v = \frac{b}{13} = \frac{12}{13}$

Hva skjer når $x = 13$cm?

$$x'(t) = -\frac{13^2 \cos v \cdot 0.5}{5} =$$

$$= -\frac{13^2 \cdot \frac{12}{13} \cdot 0.5}{5} = -13 \cdot 12 \cdot 0.1$$

$$\underline{\underline{= -15.6 \text{ cm/s}}}$$