Oblig 1 er ute.

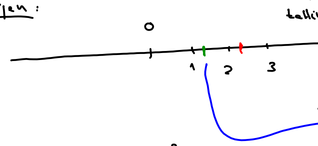
Snublegruppe Aud 5, kl 16^{15}

Padlet.

2.3 – 4.3 – 5

Komplettheitsprinsippet

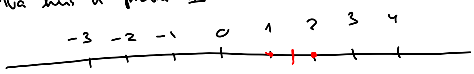
Tallinjen:



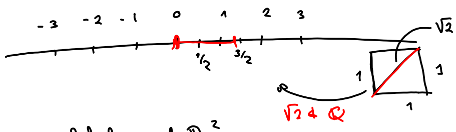
Til kvart desimaltall hører det et punkt på tallinjen 2.371824...

Omvendt er det til kvart punkt på tallinjen et tall som beskriver hvor det ligger

Hva hvis vi prøver $\mathbb{Z}$?



$\mathbb{Q}$



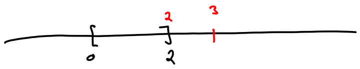
$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Hvorfor går det bra med $\mathbb{R}$?

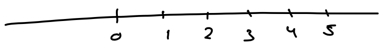
Definisjon: Anta at A er en delmengde av $\mathbb{R}$. Et tall $b \in \mathbb{R}$ kalles en øvre skranke dersom $b \geq a$ for alle $a \in A$.

Vi sier at en mengde er begrenset dersom den har en øvre skranke.

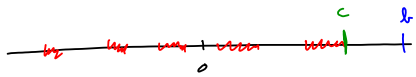
Eksempel: $[0,2]$ er begrenset, en øvre skranke 3



$\mathbb{N}$ er ubegrenset

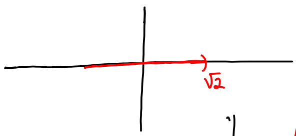


Definisjon: En minste øvre skranke til en mengde A er en øvre skranke som er mindre enn alle andre øvre skranker.



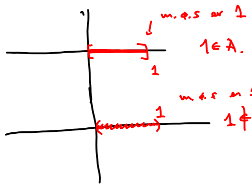
Kompletthetsprinsippet: Enhver ikke-tom, begrenset delmengde A av $\mathbb{R}$ har en minste øvre skranke.

Eksempel: $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$



Eksempel: $A = [0,1]$

$A = (0,1)$



m.ø.s er 1

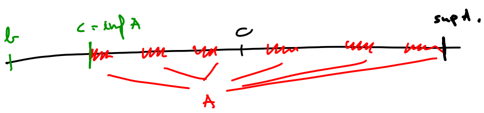
$1 \in A$.

m.ø.s er 1

$1 \notin A$

Notasjon/terminologi: Minste øvre skranke kalles også supremum og betegnes med $\sup A$

Tilsvarende vil enhver begrenset mengde ha en største nedre skranke som også kalles infimum til og betegnes med $\inf A$



Hvorfor holder kompletthetsprinsippet?

Anta at A er en ikke-tom mengde begrenset av 38.7.

1. Se på tallene og plukk ut den største heltallsdelen, la oss si <u>16</u>.
2. Se på den største førstedesimalen til tallene i denne mengden som begynner på 16, la oss si <u>7</u>. 16.7
3. Se på største andredesimal blant tallene i A som starter på 16.7. La oss si 4: $\underbrace{16.7429\ldots\ldots}_{\text{desimaltall = minste øvre skranke.}}$

osv.

Følger (4.3)

Definisjon: En følge $\{a_n\}$ er en uendelig sekvens av tall:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\ldots$$

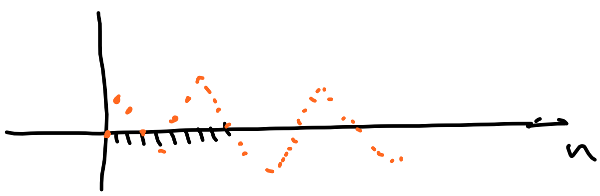
Eks: $0, 1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots\ldots$ følgen av alle kvadrattall

$\{n^2\}$ eller $\{n^2\}_{n=0}^{\infty}$

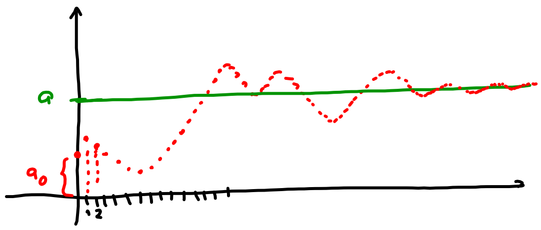
$1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots$ $\quad \{n^2\}_{n=1}^{\infty}$

Eks: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\ldots$ $\quad \left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Eks: $\sin 0, \sin 1, \sin 2, \ldots, \sin n, \ldots\ldots$ $\quad \{\sin n\}_{n=0}^{\infty}$



Grenseverdier for følger

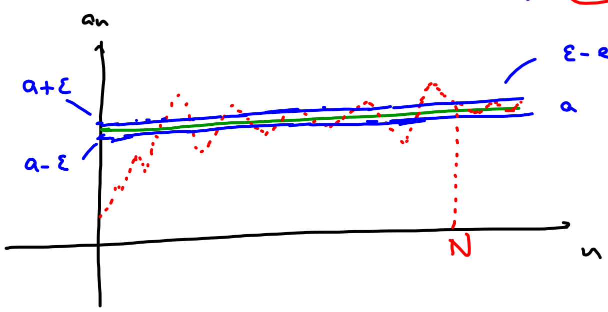


$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$

Hva skal det bety at $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dvs at følgen $\{a_n\}$ går mot a når n går mot uendelig?

Definisjonsforsøk 1: "a_n nærmer seg a når n går mot uendelig"
problematisk: Hva betyr nærmer seg? Hvor nær da?

Definisjonsforsøk 2: "Vi kan få a_n så nær a vi måtte ønske ved å velge n tilstrekkelig stor." Hvor stor da?



Definisjon: Vi sier at a_n går mot a når n går mot uendelig dersom det for enhver $\varepsilon > 0$ (uansett hvor liten) finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at $|a_n - a| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$.
$N(\varepsilon)$ er avhengig av ε.

Vi skriver $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Eksempel: Vis at $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ ved å bruke definisjonen.

Vi må vise at vi kan få avstanden $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right|$ så liten vi måtte ønske ved å velge n stor nok.

Mellomregning: $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$

Gitt en $\varepsilon > 0$, må vi vise at det finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at

$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ når $n \geq N$. $\quad \Big| \cdot \frac{(n+1)}{\varepsilon}$

$\frac{1}{\varepsilon} < n+1 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 1 < n$ Et slikt tall n, kan vi finne: $N = \frac{1}{\varepsilon} - 1$

Med dette valget av N, har vi

$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ når $n \geq N$.

Regneregler for følger: Anta $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$

Da er

(i) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$ $\left(= \lim a_n + \lim b_n\right)$

(ii) $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = A - B$ $\left(= \lim a_n - \lim b_n\right)$

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$ $\left(= \lim a_n \cdot \lim b_n\right)$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ (forutsatt at $B \neq 0$) $= \left(\frac{\lim a_n}{\lim b_n} \right)$

Eksempel: $\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2+2n}{4n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(7+\frac{2}{n})}{\cancel{n^2}(4-\frac{1}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{7+\frac{2}{n}}{4-\frac{1}{n^2}}$

$$\overset{(iv)}{=} \frac{\lim_{n\to\infty}(7+\frac{2}{n})}{\lim_{n\to\infty}(4-\frac{1}{n^2})} \overset{(i)}{\underset{(ii)}{=}} \frac{\lim_{n\to\infty} 7 + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}}{\lim_{n\to\infty} 4 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{7+0}{4-0} = \frac{7}{4}$$

Eksempel: $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^{3/2}+7}{\sqrt{n^3+2n}} = \lim \frac{n^{3/2}(3+\frac{7}{n^{3/2}})}{\sqrt{n^3(1+\frac{2}{n^2})}}$

$$= \lim \frac{\cancel{n^{3/2}}(3+\frac{7}{n^{3/2}})}{\cancel{n^{3/2}}\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}} = \frac{\lim (3+\frac{7}{n^{3/2}})}{\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{2}{n^2}}} = \frac{3}{1}$$

Eksempel: $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+7n} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+7n}-n)(\sqrt{n^2+7n}+n)}{\sqrt{n^2+7n}+n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+7n})^2 - n^2}{\sqrt{n^2+7n}+n} = \lim \frac{(\cancel{n^2}+7n)-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+7n}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{7n}{\sqrt{n^2+7n}+n} = \lim \frac{7n}{\sqrt{n^2(1+\frac{7}{n})}+n}$$

$$= \lim \frac{7\cancel{n}}{\cancel{n}[(\underbrace{\sqrt{1+\frac{7}{n}}}_{\to 1}) + \underbrace{1}_{\to 1}]} = \frac{7}{2} = \frac{7}{2}$$