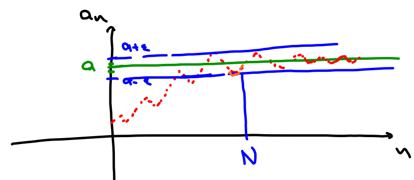
Konvergens av følger

Ingredienser

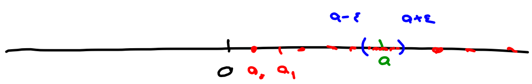
(i) Definisjonen
(ii) Regneregler
(iii) Skitne triks
(iv) Teori

Definisjon:



Vi sier at a_n konvergerer mot a (eller går mot a) dersom det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes $N \in \mathbb{N}$ slik at $|a_n - a| < \varepsilon$ når $n \geq N$.

Alternativ figur:



Setning: Hvis $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ og $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, så er

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$$

Bevis: Vi må vise at det for enhver $\varepsilon > 0$, finnes en N slik at når $n \geq N$ så $|(a_n+b_n) - (A+B)| < \varepsilon$.

Mellomregning: $|(a_n+b_n) - (A+B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)|$

$$\leq \underbrace{|a_n - A|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - B|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} \quad \text{(trekantulikheten } |x+y| \leq |x| + |y|)$$

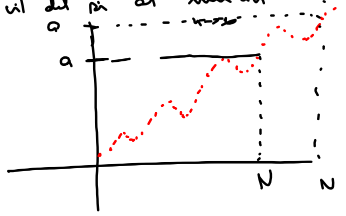
Siden $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, finnes det $N_1 \in \mathbb{N}$ slik at $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ når $n \geq N_1$

Siden $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, finnes det $N_2 \in \mathbb{N}$ slik at $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$ når $n \geq N_2$

Velg $N = \max(N_1, N_2)$. For $n \geq N$, så er da

$$\varepsilon > \underset{\frac{\varepsilon}{2}}{|a_n - A|} + \underset{\frac{\varepsilon}{2}}{|b_n - B|} \geq |(a_n+b_n) - (A+B)|$$

Hva vil det si at $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$?



Definisjon: Vi sier at $\{a_n\}$ divergerer mot uendelig og skriver $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ dersom det for enhver $a \in \mathbb{R}$ (uansett hvor stor), så finnes det en $N \in \mathbb{N}$ slik at $a_n \geq a$ for alle $n \geq N$.

Eksempel:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + 7n^2 + 3}{4n^3 + 2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\cancel{4}}\left(1 + \frac{7}{n^2} + \frac{3}{n^4}\right)}{\cancel{n^3}\left(4 + \frac{2}{n^2}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \overset{\infty}{n} \frac{\left(1 + \frac{7}{n^2} + \frac{3}{n^4}\right)}{\left(4 + \frac{2}{n^2}\right)} = \infty.$$

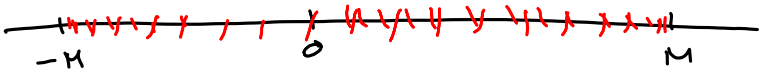
Eksempel: $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3}+n}{(\sqrt{n^2+3}-n)(\sqrt{n^2+3}+n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3}+n}{(\sqrt{n^2+3})^2 - n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3}+n}{(\cancel{n^2}+3)-\cancel{n^2}}$$

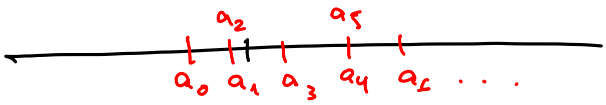
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3}+n}{3} = \infty .$$

Definisjon: En følge $\{a_n\}$ er begrenset dersom det finnes et tall M slik at $|a_n| \le M$ for alle n

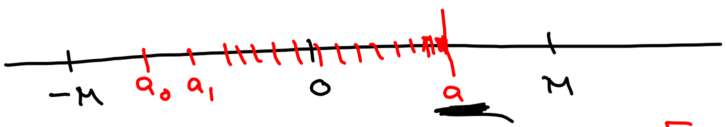
$-M \le a_n \le M$



Definisjon: En følge $\{a_n\}$ er voksende dersom $a_{n+1} \ge a_n$ for alle



Teorem: En følge som er både voksende og begrenset konvergerer (dvs har en grenseverdi)

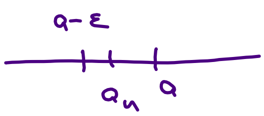


$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142, \longrightarrow \sqrt{2}$

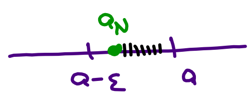
$1,\ \frac{14}{10},\ \frac{141}{100}, \ldots\ldots$

Bevis: La $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Vi ser A er begrenset og ikke-tom. Ifølge kompletthetsprinsippet har A en minste øvre skranke a.

For å vise at $\lim a_n = a$, så må vi for enhver $\varepsilon > 0$ finne en N slik at $\underbrace{|a_n - a| < \varepsilon}_{a_n > a-\varepsilon}$ for alle $n \ge N$.



Siden a er minste øvre skranke for A, kan ikke $a-\varepsilon$ være en øvre skranke.



Dette betyr at det må finnes $a_N > a - \varepsilon$.

Siden $\{a_n\}$ er voksende, må da $a_n > a-\varepsilon$ for alle $n \ge N$.

Digresjon: Regneregelne

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$ gjelder ikke nødvendigvis når grensen er uendelige. ($\infty - \infty$)

Eksempel: $a_n = n+7$, $b_n = n$

$\lim a_n = \infty$ $\qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

$\lim(a_n - b_n) = \lim 7 = 7$

Eksempel: En rekke $\{a_n\}$ er gitt ved

$a_0 = 0$, $\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+4}{5}$ for alle $n \geq 0$

$a_1 = \dfrac{a_0^2+4}{5} = \dfrac{0^2+4}{5} = \dfrac{4}{5}$

$a_2 = \dfrac{\left(\frac{4}{5}\right)^2+4}{5} = \dfrac{\frac{16}{25}+\frac{100}{25}}{5} = \dfrac{\frac{116}{25}\cdot\frac{1}{5}}{5\cdot\frac{1}{5}} = \dfrac{116}{125}$

$a_3 = \ldots$

Spørsmål: konvergerer $\{a_n\}$?

Hva kan konvergere mot? Anta $a_n \to a$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2+4}{5}$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$a = \frac{a^2+4}{5} \quad \Big|\, 5$$

$5a = a^2+4 \Rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0$

abc-formelen: $a = \dfrac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 4}}{2} = \dfrac{5 \pm \overbrace{\sqrt{25-16}}^{3}}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

Hvis $\{a_n\}$ konvergerer, må det være mot 4 eller 1.

Plan: Hvis vi kan vise at følgen er voksende og at leddene hele tiden er mindre enn 1, så må følgen konvergere mot 1 (fordi en voksende, begrenset følge alltid konvergerer, og det eneste den kan konvergere mot er 1 og 4) og 4 er utelukket)

Viser først ved induksjon at $0 \leq a_n < 1$ for alle n.

Må sjekke
$P(0)$: $a_0 < 1$
$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$P(n)$: $a_n < 1$

$P(0)$ er sann siden $a_0 = 0 < 1$.

Induksjonstrinnet: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Antar at $0 \leq a_n < 1$, og må vise at $0 \leq a_{n+1} < 1$.

$a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+4}{5} < \dfrac{1^2+4}{5} = \dfrac{5}{5} = 1$

Vet dermed at $0 \leq a_n < 1$ for alle n.

Må så vise at $\{a_n\}$ er voksende.

$P(1)$: $a_1 \geq a_0$
$\quad \frac{4}{5} \quad\; 0$
$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$P(n)$: $a_n \geq a_{n-1}$

Antar at $P(n)$ er sann (dvs $a_n \geq a_{n-1}$) og må vise at $P(n+1)$ er sann (dvs $a_{n+1} \geq a_n$).

$a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+4}{5} \geq \dfrac{a_{n-1}^2+4}{5} = a_n$

Oppsummering: Har vist at $\{a_n\}$ er en voksende følge begrenset av 1. Ifølge teoremet må følgen konvergere, og det eneste den kan konvergere mot er 1 og 4. Siden 4 er utelukket, må følgen konvergere mot 1.

Hvordan a_0 grensen?

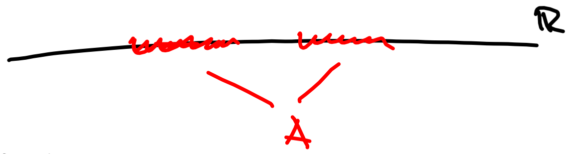
$a_0 \in [-1,1]$, så $\lim a_n = 1$

$a_0 \in [-4,-1) \cup (1,4]$ $\quad \lim a_n = 4$

$|a_0| > 4$, $\lim a_n = \infty$.

Funksjoner

$f : A \to \mathbb{R}$ der $A \subseteq \mathbb{R}$



f er en regel eller tilordning som til hver $x \in A$ gir oss $f(x) \in \mathbb{R}$.

Eksempel

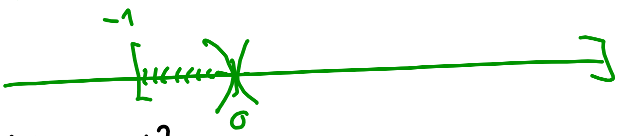
(i) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2+1}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } x \text{ er irrasjonell} \\ 1 & \text{hvis } x \text{ er rasjonell} \end{cases}$

Mengden A i $f : A \to \mathbb{R}$ kalles definisjonsmengden til f og betegnes ofte med D_f.

Hvis definisjonsmengden ikke er oppgitt, er det den største mengden der definisjonen gir mening.

Eks: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$ $x \geq -1$ $x \neq 0$ $D_f = [-1, 0) \cup (0, \infty)$



Verdimengden: $V_f = \{ f(x) : x \in A \}$.

$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$