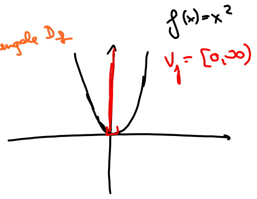
Frustrasjon

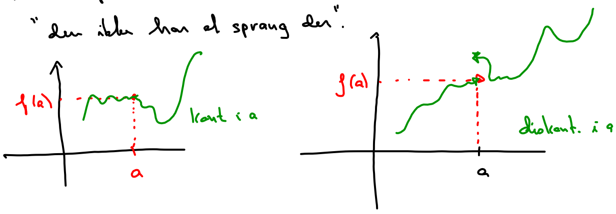
Minner om: $f : A \to \mathbb{R}$ ← Definisjonsmengde D_f

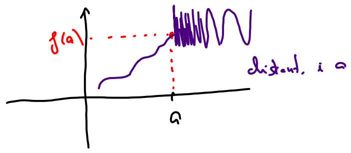
$V_f = \{ f(x) : x \in A \}$



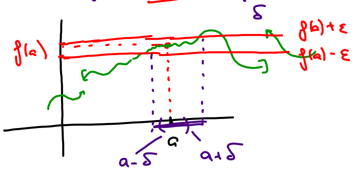
Kontinuitet

Idé: f er kontinuerlig i et punkt a dersom "den ikke har et sprang der".





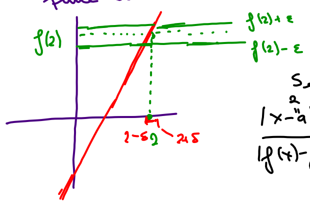
Prøvedefinisjon: Vi sier at f er kontinuerlig i punktet a dersom vi kan få $f(x)$ så nær $f(a)$ vi måtte ønske (ε) ved å velge x tilstrekkelig nær a. (δ)



Definisjon: Vi sier at f er kontinuerlig i a dersom det for hver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at når $|x-a| < \delta$ og $x \in D_f$, så er $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Eksempel: Vis at $f(x) = 7x - 5$ er kontinuerlig i $a = 2$.
Vi må vise at hvis noen gir en $\varepsilon > 0$, så kan vi alltid finne en $\delta > 0$ slik at når $|x-2| < \delta$, så er $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$.

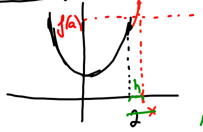
(OBS: Stigningstallet er 7)



Setter $\delta = \frac{\varepsilon}{7}$. Da ser vi at hvis $|x - \overset{2}{a}| < \delta = \frac{\varepsilon}{7}$, så

$|f(x) - f(\underset{2}{a})| = |(7x - \cancel{5}) - (7 \cdot 2 - \cancel{5})|$
$= |7x - 7 \cdot 2| = 7\,|x-2| < 7 \cdot \frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon$

Eksempel: Vis at $f(x) = x^2 + 2$ er kontinuerlig i $a = 2$.



Gitt en $\varepsilon > 0$, må vi finne en $\delta > 0$ slik at når $|x-2| < \delta$, så er $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$.

Hjelpestørrelsen: $h = x - 2. \Rightarrow x = 2 + h$

Mellomregning: $|f(x) - f(2)| = |f(2+h) - f(2)|$

$= |\underbrace{(2+h)^2 + \cancel{2}}_{f(2+h)} - (\underbrace{2^2 + \cancel{2}}_{f(2)})| = |\cancel{4} + 4h + h^2 - \cancel{4}|$

$= |4h + h^2| = \underset{\frac{\varepsilon}{5} \,\cdot\, 5}{|h|\,|4+h|}$ ← Hvordan kan jeg få denne mindre enn ε?

Velger $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{5}, 1\}$. Ma sjekke at hvis $|x-2| < \delta$,

Regneregler: Hvis $f(x)$ og $g(x)$ begge er kontinuerlige i punktet a, så $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$ også kontinuerlige i a. Det samme er $f(x)/g(x)$ forutsatt at $g(a) \neq 0$.

Eksempel: $f(x) = (7x-5) + (x^2+2)$ i pkt. 2.

kont i 2 etter resultatene ovenfor

$$f(x) = \frac{7x-5}{x^2+2}$$

Vet: Funksjonen x^a, a^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ er kontinuerlig i alle punkter hvor de er definert.
(Bevis: Ring vgs-læreren din og spør hvorfor)

Eksempel $f(x) = \dfrac{\sin x + e^x \cos x}{x^7 + \ln x}$ er kont i $a=4$

e^x, $\cos x$ $\to$ $e^x \cos x$

$e^x \cos x$, $\sin x$ $\to$ $\sin x + e^x \cos x$

x^7, $\ln x$ $\to$ $x^7 + \ln x$

$\sin x + e^x \cos x$, $x^7 + \ln x$ $\to$ $\dfrac{\sin x + e^x \cos x}{x^7 + \ln x}$

Hva med sammensatte funksjoner $f(\overbrace{g(x)}^{b=g(a)})$? i a

$\uparrow a$

Setning: Anta at g er kont i a og at f er kont. i $b = g(a)$. Da er $h(x) = f(g(x))$ kont. i a.

Eksempel: $f(x) = e^{\sin(x)}$ kont i punktet $a = 3$

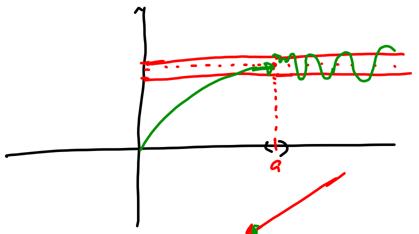
$= f(g(x))$ $\quad$ $\sin 3$

$e \nearrow f$, $\quad g \uparrow \sin$

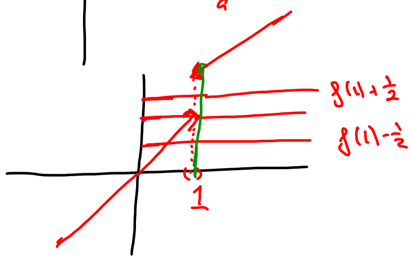
Hva betyr det at en funksjon ikke er kontinuerlig i a?

Kont: Enhver ε kan pareres med δ.

Ikke-kont: Det finnes en ε som ikke kan pareres: Det vil si at det finnes en $\varepsilon > 0$ slik at uansett hvor liten $\delta > 0$ er, så finnes det punkter $|x-a|<\delta$, slik at $|f(x)-f(a)| \geq \varepsilon$.



$$f(x) = \begin{cases} x & \text{når } x \leq 1 \\ x+1 & \text{når } x > 1 \end{cases}$$



Intuisjon: f er kontinuerlig i a dersom $f(x)$ går mot $f(a)$ når x går a.

Presisering:

Teorem (i) Anta at $f(x)$ er kontinuerlig i a. Hvis $\{x_n\}$ er en følge med $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, så vil $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$

(ii) Anta at $f(x)$ ikke er kontinuerlig i a. Da finnes det en følge $\{x_n\}$ slik at $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, men $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(a)$

Bevis (i) Gitt en $\varepsilon > 0$, må vi vise at det finnes en N slik at når $n \geq N$, så er $|f(x_n)-f(a)| < \varepsilon$. Siden f er kontinuerlig i a, finnes det en $\delta > 0$ slik at når $|x-a|<\delta$ så $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. Siden $\lim x_n = a$, så finnes det en N slik når $n \geq N$, så er $|x_n - a| < \delta$. Men hvis $n \geq N$, så har vi da at $|x_n - a| < \delta$, og dermed $|f(x_n)-f(a)| < \varepsilon$.

Definisjon: Vi sier at en funksjon er kontinuerlig dersom den er kontinuerlig i alle punkter i sitt definisjonsområde.

Eksempel: Er $f(x) = \frac{1}{x}$ kontinuerlig? Ja.