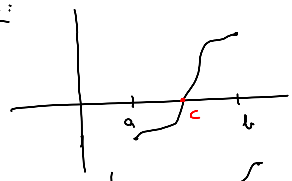
Studentrepresentasjon

Minner om: En funksjon er kontinuerlig dersom den er kontinuerlig i alle punkter i sitt definisjonsområde.

Teorem: Hvis $x_n \to x$ og f er kontinuerlig i x, så $f(x_n) \to f(x)$.

Skjæringssetningen (Seksjon 5.2)

Spørsmål:

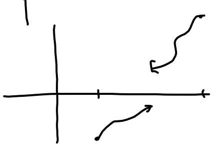


$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

$f(a) < 0$, $f(b) > 0$

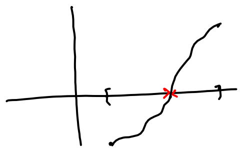
Må det finnes et punkt der $f(c) = 0$?

Nei, ikke hvis f er diskontinuerlig.

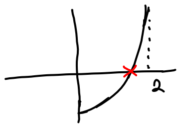


Er det nok å vite at f er kontinuerlig?

Tja!



Hadde vært mulig om tallinjen bare bestod av rasjonale tall:



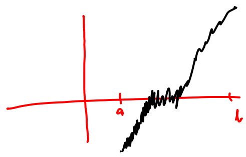
$f(x) = x^2 - 2$, $[0,2]$

$f(0) = 0^2 - 2 = -2$

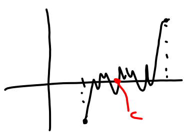
$f(2) = 2^2 - 2 = 2$

$f(x) = 0$: $x^2 - 2 = 0$

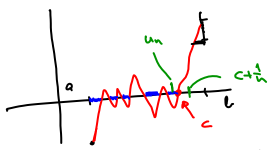
$x^2 = 2$, $x = \sqrt{2}$



Skjæringssetningen: Anta at $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig og at $f(a), f(b)$ har motsatte fortegn. Da finnes det en $c \in (a,b)$ slik at $f(c) = 0$.



Bevis: Hvordan finner vi c?



La $A = \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}$. Denne mengden er ikke-tom (fordi $a \in A$) og begrenset av b. La

$c = \sup A$ (minste øvre skranke til A).

Må vise at $f(c) = 0$. Observer at siden $f(b) > 0$, må $c < b$

Skal gjøre dette i to trinn: Først vise $f(c) \geq 0$, og så at $f(c) \leq 0$

Viser $f(c) \geq 0$: La $x_n = c + \frac{1}{n}$. Da vil $f(x_n) \geq 0$ og $x_n \to c$.

Dermed vil $f(x_n) \to f(c)$, så $f(c) \geq 0$

Viser $f(c) \leq 0$: Siden $c = \sup\{x \in [a,b] : f(x) < 0\}$, vil det finnes punkter u_n slik at $f(u_n) < 0$ og $c - \frac{1}{n} < u_n \leq c$.

Siden $u_n \to c$, og f er kontinuerlig, så vil $f(u_n) \to f(c)$.

Siden $f(u_n) \leq 0$, så må $f(c) \leq 0$.

Dermed er det bare en mulighet: $f(c) = 0$.

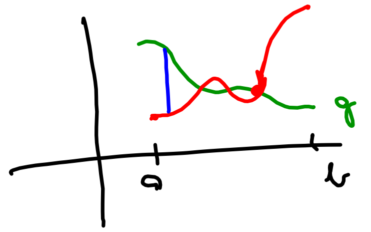
Eksempel: Vis at $f(x)=x^3+2x-1$ har et nullpunkt i $[0,1]$.

Siden f er en kontinuerlig funksjon på $[0,1]$, så kan vi bruke skjæringssetningen:

$$f(0)=0^3+2\cdot 0-1=\underline{-1} \qquad f(1)=1^3+2\cdot 1-1=\underline{2}$$

Siden $f(0)<0$, $f(1)>0$, så finnes det en $c\in(0,1)$ slik at $f(c)=0$.

Korollar: Anta at $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ er kontinuerlige og at $\underline{f(a)<g(a)}$ og $\underline{f(b)>g(b)}$. Da finnes det en $c\in(a,b)$ slik at $f(c)=g(c)$.



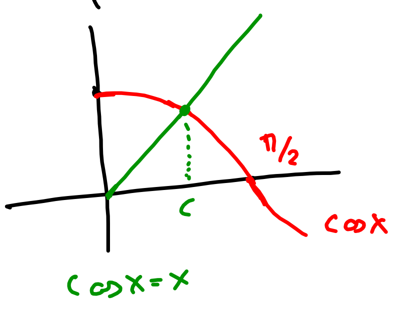
Bevis: La $h(x)=g(x)-f(x)$. Da er h kontinuerlig siden den er en differanse mellom to kontinuerlige funksjoner.

$$h(a)=g(a)-f(a)>0,\quad h(b)=g(b)-f(b)<0$$

Skjæringssetningen: Det finnes en $c\in(a,b)$ slik at $h(c)=0$, dvs

$$g(c)-f(c)=0,\ \text{dvs}\ g(c)=f(c).$$

Eksempel: Vis at funksjonen $f(x)=\cos x$ og $g(x)=x$ har et skjæringspunkt mellom 0 og $\frac{\pi}{2}$.



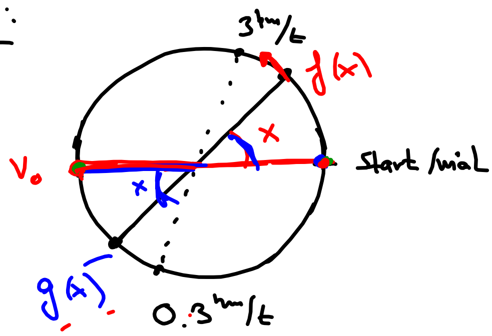
$f(0)=\cos 0=1$, $g(0)=0$

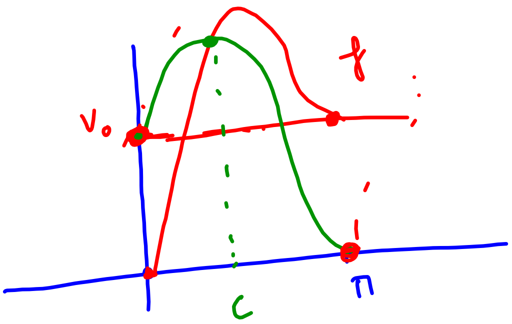
$f(\frac{\pi}{2})=\cos\frac{\pi}{2}=0$, $g(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$.

$$\underbrace{f(0)>g(0),\ f(\tfrac{\pi}{2})<g(\tfrac{\pi}{2})}$$

Korollar sier det finnes en $c\in(0,\frac{\pi}{2})$ slik at $f(c)=g(c)$, dvs $\cos c=c$.

Eksempel:





Det vil alltid finnes to diametralt motsatte punkter der du holder samme fart

$f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ kont.

$g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ kont

Må vise at det finnes en c slik at $f(c) = g(c)$

$f(0) = 0$, $f(\pi) = V_0$

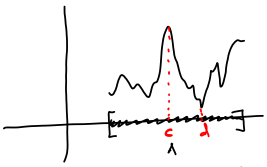
$g(0) = V_0$, $g(\pi) = 0$

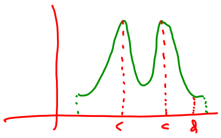
$f(0) \leq g(0)$, $f(\pi) \geq g(\pi)$

Altså finnes det et punkt c der $f(c) = g(c)$.

Ekstremalverdisetningen

Def: Anta at $f: A \to \mathbb{R}$. Vi sier at $c \in A$ er et **maksimumspunkt** for f dersom $f(c) \geq f(a)$ for alle $a \in A$.

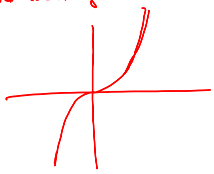




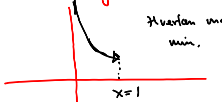
Tilsvarende er $d \in A$ et **minimumspunkt** dersom $f(d) \leq f(a)$ for alle $a \in A$

Må en funksjon ha maks. og min?

Nei: $f(x) = x^3$

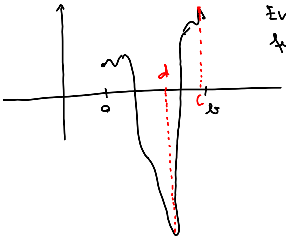


Begrens definisjonsområde: $(0,1)$ $f(x) = \frac{1}{x}$



Hverken maks eller min.

Hva med et lukket, begrenset intervall: $[a,b]$



Er det slik at en kontinuerlig funksjon på et lukket, begrenset intervall har maks/ og min. punkter.

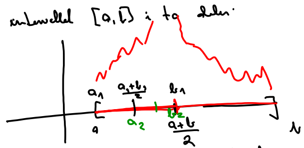
Ekstremalverdisetningen: En kontinuerlig funksjon $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ definert på et lukket, begrenset intervall har maksimums og minimumspunkter.

Bevis (for maksimumspunkt). La

$$M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

hvor vi lar $M = \infty$ hvis mengden er ubegrenset.

Deler intervallet $[a,b]$ i to deler.

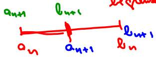


Supremum må være M over minst ett av disse halv-intervallene. Kall dette $[a_1,b_1]$. Del dette nye intervallet i to like lange delintervaller. På et av disse delintervallene (a_2,b_2), så har f supremum M. Fortsetter med halveringen og får en følge av stadig kortere intervaller:

$$[a,b],\ [a_1,b_1],\ [a_2,b_2],\ [a_3,b_3],\ \ldots,\ \underbrace{[a_n,b_n]}_{\frac{b-a}{2^n} \to 0},\ \ldots\ldots$$

med supremumsverdi M.

Følgen $\{a_n\}$ er voksende og begrenset.



Siden følgen $\{a_n\}$ er voksende og begrenset konvergerer den mot et tall $c \in [a,b]$. Siden $b_n - a_n \to 0$, må også $b_n \to c$.

Siden supremum til f over alle intervallene $[a_n,b_n]$ er M, kan jeg plukke en c_n fra $[a_n,b_n]$ slik at $f(c_n) \to M$.

Siden $a_n \leq c_n \leq b_n$, må $c_n \to c$. Dermed må $f(c_n) \to f(c)$,

$$\begin{array}{ccc} a_n & \leq c_n \leq & b_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ c & c & c \end{array}$$

og dermed må $f(c) = M$, og følgelig er c et maksimumspunkt (og $M < \infty$).