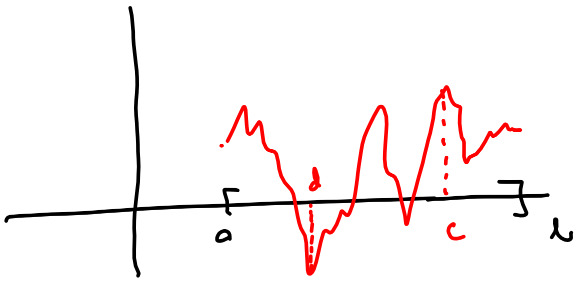
I morgen: Panikkhjelp i VB, fra kl 17

Ekstremalsetningen: Anta at $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon definert på et lukket, begrenset intervall, så har f et minimumspunkt og et maksimumspunkt.



$f(d) \leq f(x) \leq f(c)$ for alle $x \in [a,b]$

Eksempel: Vis at $f(x) = \dfrac{e^{\cos\sqrt{x^2+1}} \cdot \sin(\sqrt[3]{x}+2)}{\ln(x^2+2)}$ } kontinuerlig

har et maks punkt
er ~~kontinuerlig~~ på intervallet $\underbrace{[-\sqrt[4]{17},\ 3^{-\pi}]}_{\text{lukket, begrenset}}$

Tilfredsstiller betingelsene i Ekstremalverdisetningen.

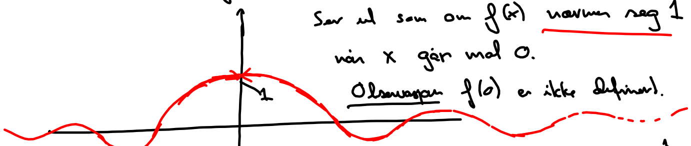
Grenseverdier

Hva betyr $\lim_{x\to a} f(x) = b$?

Eksempel: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ for $x \neq 0$.

Ser ut som om $f(x)$ nærmer seg 1 når x går mot 0.

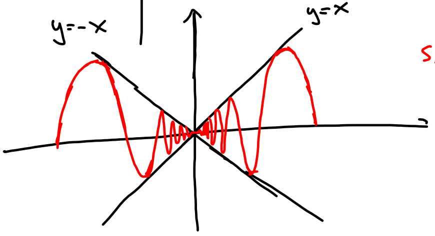
Observer: $f(0)$ er ikke definert.



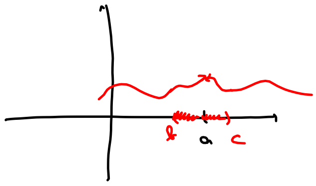
$g(x) = x\sin\frac{1}{x}$, for $x\neq 0$

Ser ut som $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

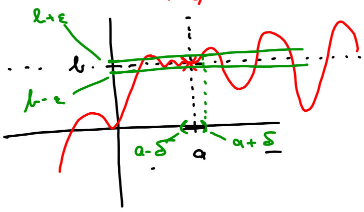
men nærmer den seg 0.



Terminologi: Vi sier at f er definert i nærheten av a dersom det finnes $b < a < c$ slik at f er definert i hele (b,c), unntatt muligens i a.



Hva ønsker vi oss når $\lim_{x\to a} f(x) = b$?

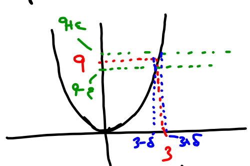


Vi vil kunne få $f(x)$ så nær b vi ønsker ved å velge x tilstrekkelig nær a ($x \neq a$).

Definisjon: Vi sier $f(x)$ har b som grenseverdi når x går mot a (og skriver $\lim_{x\to a} f(x) = b$) dersom det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at når $0 < |x-a| < \delta$, så er $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Eksempel: Bruk definisjonen av grense til å vise at

$$\lim_{x\to 3} x^2 = 9.$$



Gitt en $\varepsilon > 0$, må vi vise at det finnes en $\delta > 0$ slik at når $|x-3| < \delta$, så er $|\underset{x^2}{f(x)} - 9| < \varepsilon$

Mellomregning:

Setter
$h = x-3$
$x = 3+h$

$$|x^2-9| = |(3+h)^2-9| = |\cancel{9}+6h+h^2-\cancel{9}|$$

$$= |6h+h^2| = \underbrace{|h|}_{\frac{\varepsilon}{7}}\underbrace{|6+h|}_{7} \overset{?}{<} \varepsilon$$

Velg $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$. Sjekker at δ gjør jobben:

Anta $|x-3| < \delta$, dvs $|h| < \delta$. Da er

$$|x^2-9| = \underbrace{|h|}_{\frac{\varepsilon}{7}}\underbrace{|6+h|}_{\leq 7} < \frac{\varepsilon}{7}\cdot 7 = \varepsilon$$

<u>Regneregler for grenseverdier</u>: Anta $\lim_{x\to a} f(x) = F$ og $\lim_{x\to a} g(x) = G$. Da

(i) $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = F+G \quad \left(= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)\right)$

(ii) $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = F-G$

(iii) $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = F\cdot G$

(iv) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}$ forutsatt at $G\neq 0$.

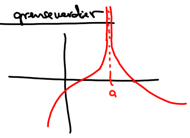
<u>Eksempel</u>: Finn $\lim_{x\to 0} \frac{\overset{0}{x} + \overset{1}{\frac{\sin x}{x}}}{\underset{0}{x^2} + \underset{1}{1}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{\sin x}{x}}{x^2+1} \overset{(iv)}{=} \frac{\lim_{x\to 0}\left(x+\frac{\sin x}{x}\right)}{\lim_{x\to 0}(x^2+1)} = \frac{\overset{0}{\lim_{x\to 0} x} + \overset{1}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}}{\underset{0}{\lim_{x\to 0} x^2} + \underset{1}{\lim_{x\to 0} 1}}$$

$$= \frac{0+1}{0+1} = \underline{\underline{1}}$$

Flere typer grenseverdier

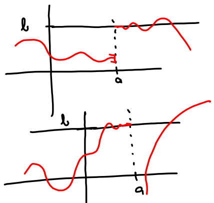
$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$



Ensidige grenser:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = b$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = b$$



Sammenheng mellom ensidige og tosidige grenser:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = b \ \text{og} \ \lim_{x\to a^-} f(x) = b$$

Eksempel: La $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{når } x > 0 \\ e^x & \text{når } x \leq 0. \end{cases}$

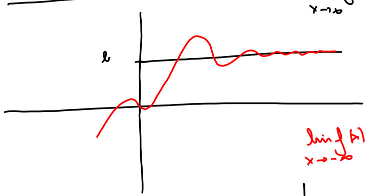
Regn ut $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Regner ut de ensidige grensene:

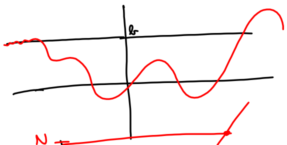
$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \underline{\underline{1}} \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0} e^x = e^0 = \underline{\underline{1}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \underline{\underline{1}}$$

Grensen når $x\to\infty$, $x\to-\infty$:

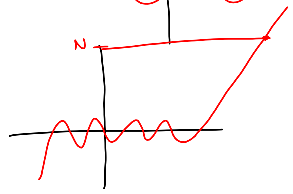
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b\,?$$



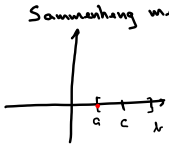
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$



$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$



Sammenheng mellom grenseverdier og kontinuitet.



f er kontinuerlig i et indre punkt c hvis og bare hvis $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

f er kontinuerlig i et venstre endepunkt hvis og bare hvis $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

f er kontinuerlig i et høyre endepunkt hvis og bare hvis $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

Eksempel: Finn $\lim_{x\to 2} \underbrace{\frac{x^2+\sin(\pi x)}{e^x}}_{\text{kont. funk. } g(x)} = \frac{2^2+\sin(2\pi)}{e^2} = \underline{\underline{\frac{4}{e^2}}}$

$$\lim_{x\to 2} g(x) = g(2)$$

Eksempel:

Trekker ut leddet med lavest eksponent

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+x^{1/2}}{x^{1/2}+x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x^{1/2}}(x^{1/2}+1)}{\cancel{x^{1/2}}(1+x^{3/2})}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{1/2}+1}{1+x^{3/2}} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$$

Eksempel:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x})^2-1^2}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1}+\cancel{x}\cancel{-1}}{\cancel{x}(\sqrt{1+x}+1)}$$

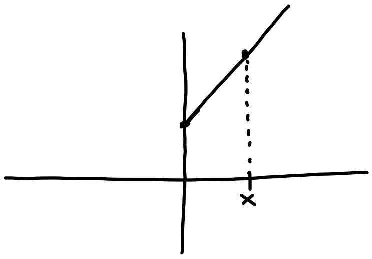
$$= \lim \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{1+1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Eksempel La

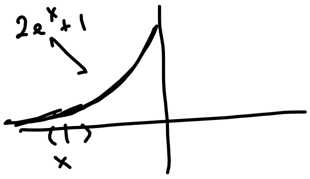
$$f(x) = \begin{cases} 2e^x+1 & \text{for } x<0 \\ x+3 & \text{for } x \geq 0. \end{cases} \qquad f(0) = 0+3=3.$$

Vis at f er kontinuerlig.

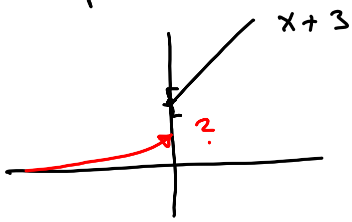
Hvis $x>0$, så er f kontinuerlig i x fordi f faller sammen med den kont. funksjonen $x+3$ i et område rundt x.



Hvis $x<0$, vil $f(x)$ falle sammen med den kont. funksjonen $2e^x+1$ i et område rundt x, så f er kont. i x.



Hva med "bruddpunktet" $x=0$.



For å sjekke at f er kontinuerlig i 0, må vi vise at

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 3$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x+3) = \underline{\underline{3}}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (2e^x+1) = 2\underbrace{e^0}_{1}+1 = 3$$

Altså er $\lim_{x\to 0} f(x) = 3 = f(0)$: HURRA, f er kontinuerlig.