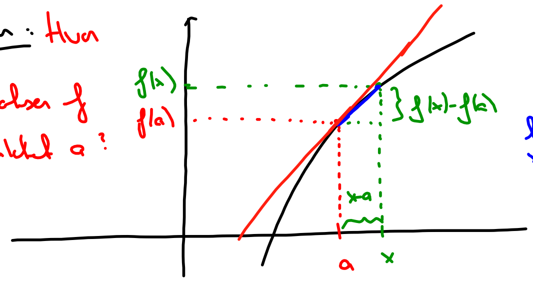
Derivasjon

Ideen: Hvor fort vokser f i punktet a?



$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

stigningstall.

Definisjon: Vi sier at f er deriverbar i punktet a dersom

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

eksisterer (som et antall). I så fall skriver vi

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

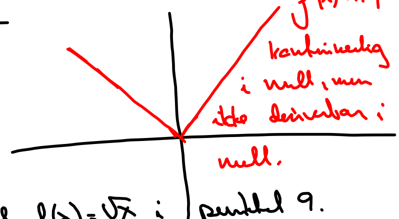
og kaller den deriverte til f i punktet a.

Setning: Hvis f er deriverbar i a, så er den kontinuerlig.

Bevisskisse: Hvis $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ skal eksistere, må $\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)]=0$,

så $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Dette betyr at f er kontinuerlig i a.

Eksempel: $f(x)=|x|$

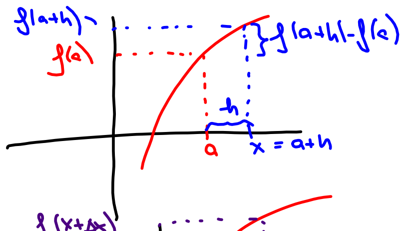


Eksempel: Finn den deriverte til $f(x)=\sqrt{x}$ i punktet 9.

$$f'(9) = \lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{9}}{x-9} = \lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \lim_{x\to 9}\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$$

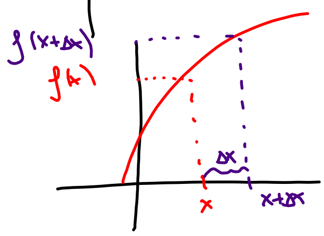
$$= \lim_{x\to 9}\frac{(\sqrt{x})^2-3^2}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x\to 9}\frac{\cancel{x-9}}{\cancel{(x-9)}(\sqrt{x}+3)} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

Alternative skrivemåter:



$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = Df(x)$$

Derivasjonsregler

Spesielle derivasjonsregler:

$(a)' = Da = 0$ (a konstant)

$(x^n)' = Dx^n = nx^{n-1}$

$(e^x)' = De^x = e^x$

$(\ln|x|)' = D\ln|x| = \frac{1}{x}$ for $x \neq 0$

$(\sin x)' = D\sin x = \cos x$

$(\cos x)' = D\cos x = -\sin x$

$(\tan x)' = D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

Generelle derivasjonsregler

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$

$$(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Kjerneregelen:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Eksempel: $f(x) = \frac{x^3 \cdot \cos(x^2)}{\sin x}$

$$f'(x) = \frac{(x^3\cos(x^2))' \cdot \sin x - (x^3\cos x^2)(\sin x)'}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{[(3x^2\cos(x^2) + x^3(-\sin(x^2)\cdot 2x)]\sin x - x^3\cos(x^2)\cdot\cos x}{\sin^2 x}$$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots$

Praktisk bruk

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

For liten h

$$f'(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \underbrace{e(h)}_{\text{lite feilledd} \to 0} \quad | \cdot h$$

$$f'(a)h = f(a+h)-f(a) + e(h)h$$

$$\underbrace{f(a+h)-f(a)}_{} = \underbrace{f'(a)h}_{} - \underbrace{e(h)h}_{\text{tint som er liten sammenlignet med } h}$$

Konklusjon: $f'(a)h$ er en god tilnærming til $f(a+h)-f(a)$ når h er liten.

Eksempel: Bremselengden på tørrvei:

$$\underbrace{f(x)}_{\text{Bremselengde i meter}} = \frac{x^2}{200} \qquad f'(x) = \frac{x}{100}$$

x fart i km/t.

Hvor mye øker bremselengden fra 100 til 110?

Eksakt: $f(110) - f(100) = \frac{110^2}{200} - \frac{100^2}{200} = 10.5 \text{ m}$

ss

$$f'(100)\cdot 10 = \frac{100}{100}\cdot 10 = 10 \text{ m}$$

Logaritmisk derivasjon

Deriverer: $\left(\ln|f(x)|\right)' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$ kjerneregel

$$f'(x) = f(x)\underbrace{\left(\ln|f(x)|\right)'}$$

Knep: kan kanskje forenkles med regneregler for ln.

Eksempel: Deriver $f(x) = x^x$, $x > 0$

Log. derivasjon: Regner først ut

$$\left(\ln x^x\right)' = \left(x \ln x\right)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$
$$= \ln x + 1$$

Altså: $(x^x)' = x^x\,(\ln x + 1)$

Alternativ: $(\underset{e^{\ln x}}{x}{}^x)' = \left(\left(e^{\ln x}\right)^x\right)' = \left(e^{x \ln x}\right)'$

$$= e^{x \ln x}\,(x \ln x)' = x^x \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$= x^x\,(\ln + 1)$$

$$\boxed{f'(x) = f(x)\left(\ln f(x)\right)'}$$

Eksempel: Deriver $f(x) = \sqrt[17]{x^3 \cos x}$

Ser $\ln f(x) = \ln\left[\left(x^3 \cos x\right)^{1/17}\right] = \frac{1}{17}\left[\ln x^3 + \ln \cos x\right]$

$$= \frac{1}{17}\left[3 \ln x + \ln \cos x\right]$$

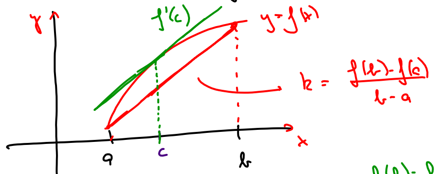
$$\left(\ln f(x)\right)' = \frac{1}{17}\left[3\,\frac{1}{x} + \frac{1}{\cos x}(-\sin x)\right]$$
$$= \frac{1}{17}\left[\frac{3}{x} - \tan x\right]$$

Altså:

$$f'(x) = f(x)\left(\ln f(x)\right)' = \sqrt[17]{x^3 \cos x}\left[\frac{1}{17}\left(\frac{3}{x} - \tan x\right)\right]$$

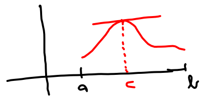
Middelverdisetning (6.2)

Intro:



Det finnes en $c \in (a,b)$ slik $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Lemma: Hvis $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ har et maks eller min. i et punkt $c\in(a,b)$ der f er deriverbar, så må $f'(c)=0$.



Bevis: Vi må vise at det er umulig at $f'(c)>0$ og at det er umulig at $f'(c)<0$. Ser på $f'(c)>0$.

Vi vet

$$0 < f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

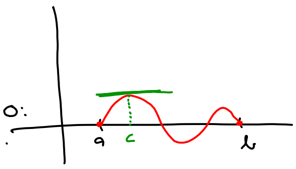
Dette betyr at hvis h er tilstrekkelig liten, så må

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} > 0$$

$h>0$: $f(c+h)-f(c)>0 \Rightarrow f(c+h)>f(c)$ (c ikke maks)

$h<0$: $f(c+h)-f(c)<0 \Rightarrow f(c+h)<f(c)$ (c ikke min).

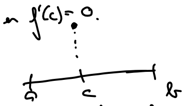
Rolles teorem: Anta at $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er kontinuerlig og deriverbar i alle punkter $x\in(a,b)$. Anta videre at $f(a)=f(b)=0$. Da finnes det et punkt $c\in(a,b)$ slik at $f'(c)=0$.



Bevis: To muligheter:

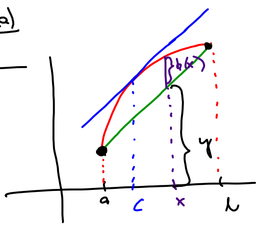
(i) Funksjonen er konstant lik 0: Da er $f'(c)=0$ i alle punkter.

(ii) Hvis funksjonen ikke er konstant, så har den positive eller negative verdier. Ifølge ekstremalverdisetningen har f maks og min. punkter, og minst ett av disse punktene (kall det c) ligger i det indre av intervallet, og følgelig er $f'(c)=0$.



Middelverdisetningen: Anta at $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er kontinuerlig og deriverbar i alle punkter $x\in(a,b)$. Da finnes det en $c\in(a,b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Bevis: Formel for sekanten

$$y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Definér:

$$k(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$k(a)=k(b)=0$

k tilfredsstiller Rolle.

Rolles teorem: Finnes en c der $k'(c)=0$:

$$k'(x) = f'(x) - 0 - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot 1$$

$$= f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Dermed

$$0 = k'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \boxed{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$