Husk:

Analysens fundamentalteorem: (kort versjon) En kontinuerlig f er integrerbar og hvis F er en antiderivert til f, så

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Ubestemte integraler

Def: Det ubestemte integralet $\int f(x)\,dx$ er navnet på den generelle antideriverte til, dvs

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

der F er en antiderivert til f.

Eksempel: $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$

Liste av ubestemte integraler:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{for } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \int (e^{\ln a})^x\,dx = \int e^{x\ln a}\,dx = \frac{e^{x\ln a}}{\ln a} + C = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$

Generelt: Integral er lineært:

$$\int a f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx, \quad a \text{ konstant}$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

Merk: FY!!

$$\cancel{\int f(x)g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \int g(x)\,dx}$$

Eksempel: $\int (3e^x + \frac{1}{2}x^4)\,dx = \int 3e^x\,dx + \frac{1}{2}\int x^4\,dx$

$$= 3\int e^x\,dx + \frac{1}{2}\int x^4\,dx = 3e^x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5} + C = 3e^x + \frac{x^5}{10} + C$$

Enkel substitusjon:

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$ der F er en antiderivert til f.

Bevis: Må vise at $F(g(x))$ er en antiderivert til $f(g(x))\,g'(x)$:

$$(F(g(x)))' = \underbrace{F'}_{f}(g(x))\,g'(x) = f(g(x))\,g'(x)$$

Innfører en ny variabel $u = g(x)$

$$\frac{du}{dx} = u' = g'(x)$$

$$du = g'(x)\,dx$$

Praktisk bruk: $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx$

$$= \int f(u)\,du = F(u) + C$$

$$= F(g(x)) + C$$

Eksempel: $\int x \sin \overset{u}{x^2}\, dx$, $\quad x\,dx = \frac{1}{2}du$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow du = 2x\,dx$

$\frac{1}{2}du = x\,dx$

$$= \int \sin u \,\tfrac{1}{2}\,du = \tfrac{1}{2}\int \sin u\,du$$

$$= \tfrac{1}{2}(-\cos u) + C = -\tfrac{1}{2}\cos x^2 + C$$

Eksempel: $$\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx = \int \frac{x^2}{1+(x^3)^2}\,\cancel{dx}$$

$u = x^3$

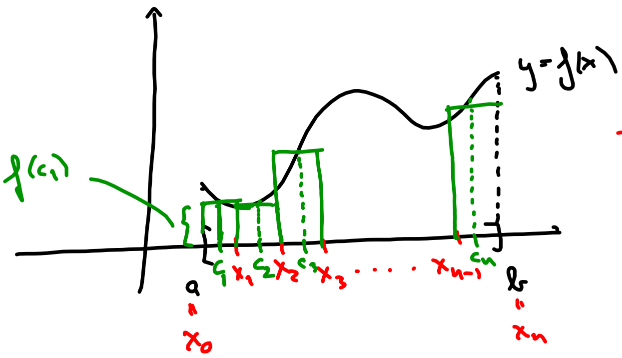
$\frac{du}{dx} = 3x^2$

$\frac{1}{3}du = x^2\,dx$

$$= \int \frac{\frac{1}{3}du}{1+u^2} = \tfrac{1}{3}\arctan u + C$$

$$= \tfrac{1}{3}\arctan x^3 + C$$

Riemannsummer (seksjon 8.4)



Π en partisjon

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

U et utvalg:

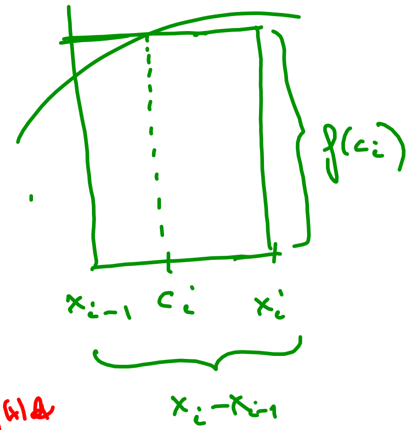
$c_i \in [x_{i-1}, x_i]$

Arealet til det i-te rektangelet

$$A_i = f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

Totalt areal til boksen

$$A = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

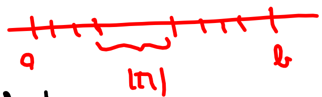


Riemannsummen

$$R(\Pi, U) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \xrightarrow{\text{idé}} \int_a^b f(x)\,dx$$

når oppdelingen blir finere og finere.

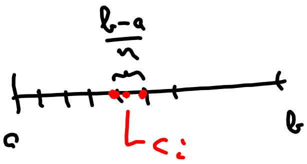
Maskevidden til partisjonen Π: $|\Pi| = \max\{x_i - x_{i-1}\}$



Teorem: Anta at $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon og at $\{\Pi_n, U_n\}$ er en følge av partisjoner og utvalg slik at $|\Pi_n| \to 0$. Da vil

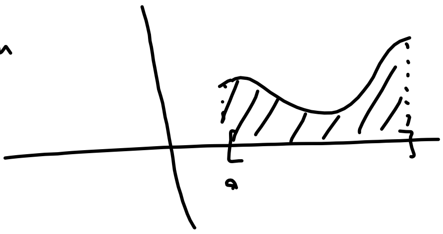
$$R(\Pi_n, U_n) \to \int_a^b f(x)\,dx$$

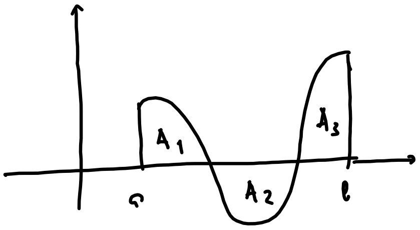
Eksempel: Π_n = partisjonen som deler $[a,b]$ i n like store deler.



Anvendelser av integralet (seks. 8.6)

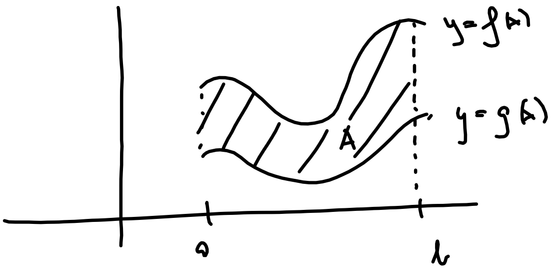
Arealer. Hvis $f(x) \geq 0$ på intervallet $[a,b]$, så vil $\int_a^b f(x)\,dx$ gi oss arealet under grafen.





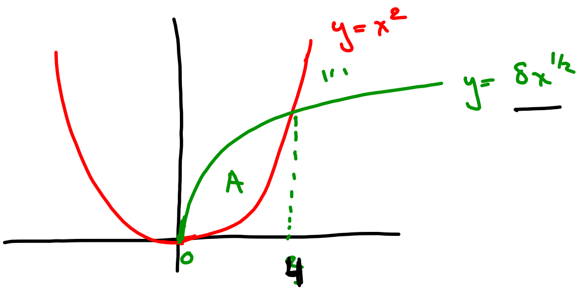
$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3.$$

Areal mellom funksjonsgrafer $f(x) \geq g(x)$.



$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Eksempel: Finn arealet av området avgrenset av $y=x^2$ og $y=8x^{1/2}$



Finner øvre grense:

$$x^2 = 8x^{1/2}$$
$$\Downarrow$$
$$x^{\cancel{4}\,3} = 64\cancel{x}$$

$$x = 4$$

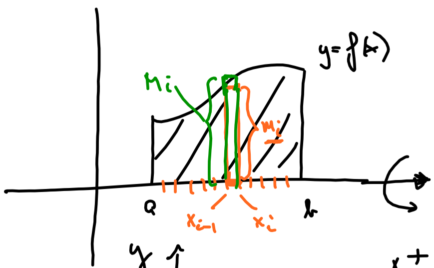
$$A = \int_0^4 [8x^{1/2} - x^2]\,dx = \left[8\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^4$$

$$= 8\cdot\frac{2}{3}\,4^{3/2} - \frac{4^3}{3} = \frac{16}{3}\cdot 8 - \frac{64}{3} = \frac{128}{3} - \frac{64}{3} = \frac{64}{3}$$

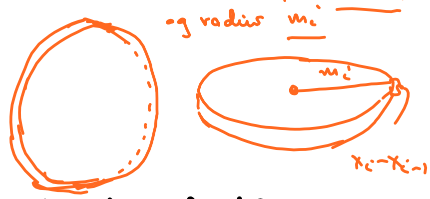
$$4^{3/2} \Downarrow (4^{1/2})^3 = 2^3$$

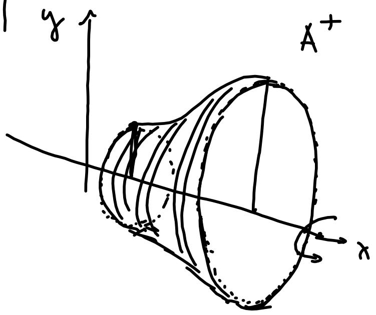
Volumer

Omdreiningslegemer rundt x-aksen



Sylinder med høyden $x_i - x_{i-1}$ og radius m_i





Hva blir volumet?

$v_i = \pi m_i^2 (x_i - x_{i-1})$

$v = \sum \pi m_i^2 (x_i - x_{i-1})$

$V = \sum \pi M_i^2 (x_i - x_{i-1})$

$$\sum_{i=1}^{n} \pi m_i^2 (x_i - x_{i-1}) \le \text{Volum} \le \sum_{i=1}^{n} \pi M_i^2 (x_i - x_{i-1})$$

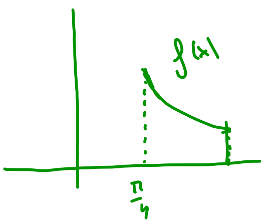
nedre trappesum til $\pi f(x)^2$

↳ øvre trappesum til $\pi f(x)^2$

Konklusjon: Volum $= \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$.

Eksempel: Hva er volumet til omdreiningslegemet når

$f(x) = \frac{1}{\sin x}$, $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$, dreies om x-aksen.

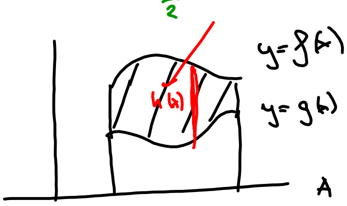


$$V = \pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin x}\right)^2 dx = \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x} dx$$

$$= \pi \left[-\cot x\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \pi\left[-\cot\frac{\pi}{2} + \cot\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= \pi\left[-\frac{\overset{0}{\cos\frac{\pi}{2}}}{\underset{1}{\sin\frac{\pi}{2}}} + \frac{\overset{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos\frac{\pi}{4}}}{\underset{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin\frac{\pi}{4}}}\right] = \pi\left[0 + 1\right] = \underline{\underline{\pi}}$$

En potensiell felle:



Volumet: $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx - \pi \int_a^b g(x)^2 dx = \pi \left[\int_a^b f(x)^2 - g(x)^2\right] dx$

Feil: $\cancel{\pi \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx}$