## L'Hôpitals regel

Anta $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ og $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, da

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

$c \in (a,x)$

**Nesten bevis:**

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(a)}}}{g(x) - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{g(a)}}} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \quad \frac{= f'(c)}{= g'(d)}$$

$d \in (a,x)$

$$\overset{MVS}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(c)}{g'(d)} \overset{?}{=} L \quad \text{siden } c \to a,\ d \to a$$

$c = d$

**Cauchys middelverdisetning:** Anta at $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlige i $[a,b]$ og deriverbare i $(a,b)$. Da finnes et punkt $c \in (a,b)$ slik at

$$[f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)] \cdot f'(c) \quad \Big|\ \frac{1}{g'(c)[g(b)-g(a)]}$$

dvs

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

forutsatt at $g'(c) \neq 0,\ g(b)-g(a) \neq 0$.

**Bevis:** La

$$h(x) = [f(b) - f(a)]\, g(x) - [g(b) - g(a)]\, f(x)$$

Ser på endepunktene

$$h(a) = f(b)g(a) - \cancel{f(a)g(a)} - g(b)f(a) + \cancel{g(a)f(a)}$$
$$= f(b)g(a) - f(a)g(b)$$
$$h(b) = \dots\ f(b)g(a) - f(a)g(b)$$

$h(a) = h(b)$

Bruker MVS på $h$:

$$0 = \frac{h(b)-h(a)}{b-a} = h'(c) = [f(b)-f(a)]\, g'(c) - [g(b)-g(a)]\, f'(c)$$

dvs

$$[f(b)-f(a)]\, g'(c) = [g(b)-g(a)]\, f'(c)$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

**Bevis for L'Hôpitals regel:**

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(a)}}}{g(x) - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{g(a)}}} \overset{CMVS}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L$$

der $c$ ligger mellom $x$ og $a$, så $c$ går mot $a$, når $x$ går mot $a$

Vet $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

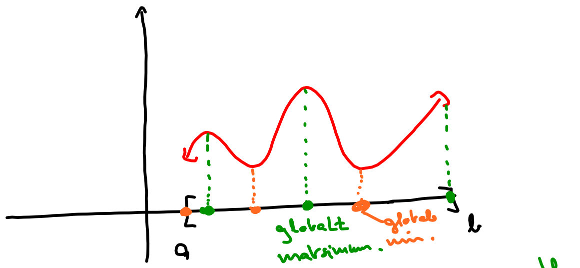
# Kurvedrøfting

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$

## Maks. og min. punkter:

Lokale maks. punkter

—||— min. punkter.




lokale maks punkter

lokale min. punkter.

**Setning:** Hvis $c$ er et lokalt maks/min for funksjonen $f$ på intervallet $[a,b]$, så er enten

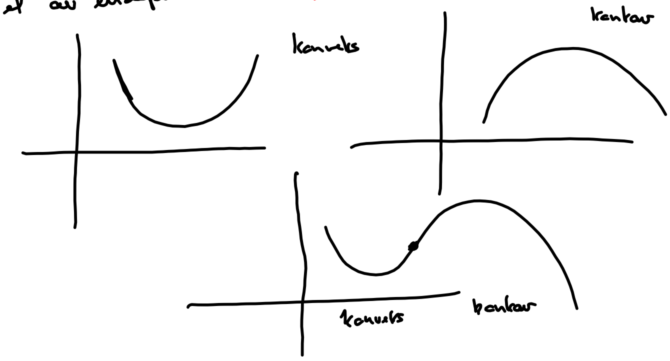
(i) $f'(c)=0$

(ii) $f'(c)$ eksisterer ikke

(iii) $c$ er et av endepunktene $a,b$

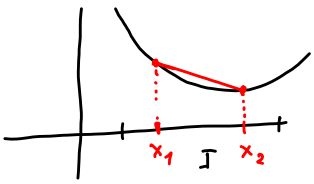
kritiske punkter

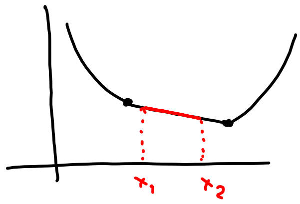
## Krumning:



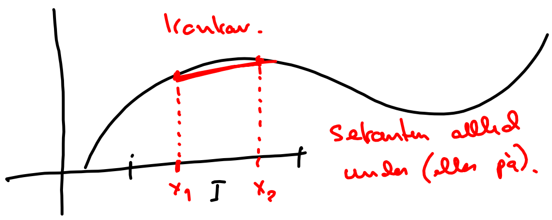

## Geometrisk definisjon:

$f$ er konveks på $I$: For alle $x_1,x_2\in I$, så ligger sekanten mellom punktene $(x_1,f(x_1))$ og $(x_2,f(x_2))$ over eller på funksjonsgrafen.



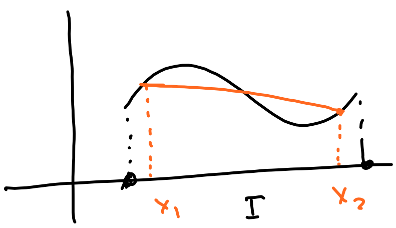

konkav.




Sekanten alltid under (eller på).

Konveks

pengo veks




Konkav

penga datt av.

**Setning:** (i) Anta at $f''(x)\geq 0$ for alle $x$ i et intervall $I$.

Da er $f$ konveks på $I$.

(ii) Anta at $f''(x)\leq 0$ for alle $x$ i et intervall $I$.

Da er $f$ konkav på $I$.

Eksempel: Drøft $f(x) = x^{2/3}e^x$ på intervallet $[-2,2]$

(Finn maks/min. punkter, hvor funksjonen er voksende/avtagende, hvor den er konkav/konveks, skisser).

Observasjon: $f$ er alltid ikke-negativ $x^{2/3} = (x^2)^{1/3}$.

Derivere: $f'(x) = \frac{2}{3}x^{2/3-1}\cdot e^x + x^{2/3}\cdot e^x = \frac{2}{3}x^{-1/3}e^x + x^{2/3}e^x$

$$= e^x\left(\frac{2}{3}x^{-1/3} + x^{2/3}\right) = x^{-1/3}e^x\left(\frac{2}{3} + x\right)$$

Kritiske punkter:

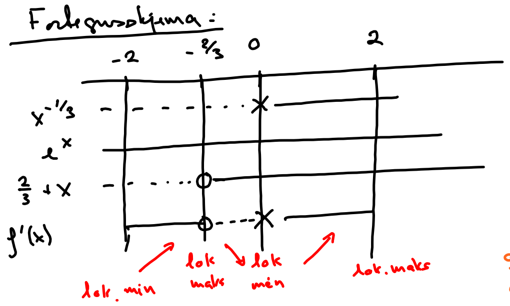
(i) Derivert lik 0: $x = -\frac{2}{3}$

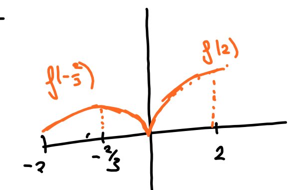
(ii) Derivert eksisterer ikke: $x = 0$

(iii) Endepunktene $-2, 2$

$x^{-1/3} = \frac{1}{x^{1/3}}$

Fortegnsskjema:




globall min i $x=0$.
global max : $x=2$.

Undersøker hvor $f$ er konveks/konkav

$$f'(x) = x^{-1/3}e^x\left(\frac{2}{3}+x\right) = e^x\left(\frac{2}{3}x^{-1/3} + x^{2/3}\right)$$

$$f''(x) = e^x\left(\frac{2}{3}x^{-1/3} + x^{2/3}\right) + e^x\left(\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-1/3-1} + \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}\right)$$

$$= e^x\left[\frac{2}{3}x^{-1/3} + x^{2/3} - \frac{2}{9}x^{-4/3} + \frac{2}{3}x^{-1/3}\right]$$

$$= e^x\left[x^{2/3} + \frac{4}{3}x^{-1/3} - \frac{2}{9}x^{-4/3}\right]$$

$$= x^{-4/3}e^x\left[x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{9}\right]$$

Faktoriser $x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{9} = (x-r_1)(x-r_2)$

Mellomregning

$x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{9} = 0$

$x = \dfrac{-\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} - 4\left(-\frac{2}{9}\right)}}{2}$ $\quad \frac{8}{9}$

$= \dfrac{-\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{24}{9}}}{2}$

$= \dfrac{-\frac{4}{3} \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}}{2}$ $\qquad \sqrt{24} = \sqrt{4\cdot 6} = 2\sqrt{6}$

$= -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{6}}{3} \approx \begin{cases} 0.15 \\ -1.49 \end{cases}$

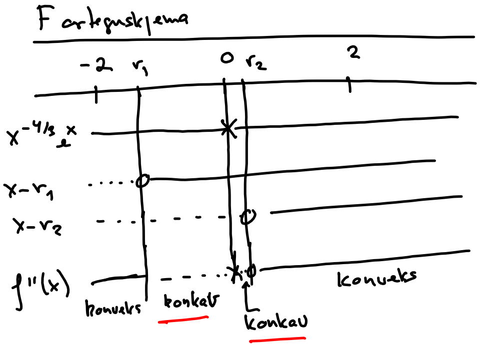
$r_1 = -\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3}$

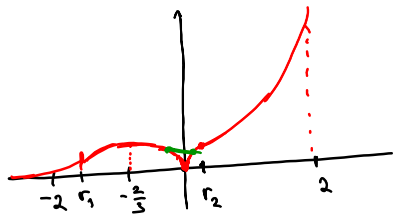
$r_2 = -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3}$

Dvs

$$f''(x) = x^{-4/3}e^x(x-r_1)(x-r_2)$$

Fortegnskjema




$f$ konkav på $[r_1, 0]$
og på $[0, r_2]$,
men ikke konkav
på $[r_1, r_2]$!
Skyld! $f''(0)$ som
ikke eksisterer.