n-tupler og matriser

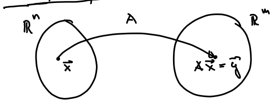
To ulikheter: Schwarz' ulikhet: $|\vec{x}\cdot\vec{y}| \le |\vec{x}||\vec{y}|$

Trekantulikhet: $|\vec{x}+\vec{y}| \le |\vec{x}|+|\vec{y}|$

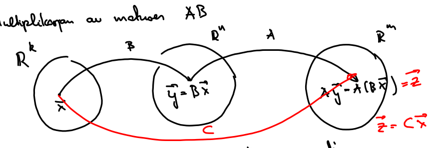
Multiplikasjon av matrise $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ og vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Transformasjon



Multiplikasjon av matriser AB



B $n\times k$-matrise $\qquad A$ $m\times n$-matrise

$$\begin{array}{c} \\ i \end{array}\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ a_{i1} \; a_{i2} \; \cdots \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{kj} \end{pmatrix}$$

j-te; A; B; i-te rad; j-te søyle

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots$$

Inverse matriser: A en $n\times n$-matrise. B er en invers til A dersom

$$AB = BA = I_n$$

Fakta: Ikke alle matriser har invers, men ingen har mer enn én.

A^{-1} er betegnelsen på den inverse når den finnes.

Regneregler: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Advarsel: Ikke skriv $\frac{A}{B}$. Betyr dette AB^{-1} eller $B^{-1}A$?

Oppgave 7, 2020: Et plantesamfunn består av

x_n nyspirte
y_n unge
z_n voksne

Hva skjer fra år n til år $n+1$.
Alle nyspirte overlever og er nå unge planter.
80% av de unge overlever og er nå voksne
60% —"— voksne —"— er fortsatt voksne.

Hver ung plante og hver voksen plante gir opphav til en nyspirt plante året etter.

a) Finn en matrise M slik at

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

$x_{n+1} = y_n + z_n$
$y_{n+1} = x_n$
$z_{n+1} = 0.8y_n + 0.6z_n$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}}_{\vec{r}_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}}_{\vec{r}_n}$$

b) Finnes det en matrise N slik at

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} \; ? \quad \vec{r}_n = N\vec{r}_{n+1}$$

Har at $\vec{r}_{n+1} = M\vec{r}_n$. Hvis M har en invers matrise N, så

$$N\vec{r}_{n+1} = N(M\vec{r}_n) = \overbrace{(NM)}^{I_n}\vec{r}_n = \vec{r}_n$$

Hvis M har en invers, kan vi sette $N = M^{-1}$.

Triks: For å vise at M har en invers, er det nok å vise at $\det(M) \neq 0$.

Alternativ: Finn M^{-1} ved utregning:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d+g & e+h & f+i \\ a & b & c \\ \frac{4}{5}d + \frac{3}{5}g & \frac{4}{5}e + \frac{3}{5}h & \frac{4}{5}f + \frac{3}{5}i \end{pmatrix}$$

$d+g = 1$ $\qquad e+h = 0$ $\qquad f+i = 0$
$a = 0$ $\qquad b = 1$ $\qquad c = 0$
$\frac{4}{5}d + \frac{3}{5}g = 0$ $\qquad \frac{4}{5}e + \frac{3}{5}h = 0$ $\qquad \frac{4}{5}f + \frac{3}{5}i = 1$

$\boxed{a=0,\ b=1,\ c=0 \quad e=0,\ h=0 \quad d=-3,\ g=4 \quad f=5,\ i=-5}$

$\boxed{\begin{aligned} d + g &= 1 \;\; |\cdot(-3) \\ 4d + 3g &= 0 \end{aligned}}$ $\qquad$ $\underbrace{\begin{aligned} e+h &= 0 \\ 4e+3h &= 0 \end{aligned}}_{e=h=0}$ $\qquad$ $\boxed{\begin{aligned} f+i &= 0 \\ 4f+3i &= 5 \end{aligned}}$

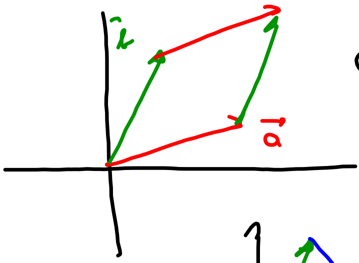
$\Downarrow$

$-3d - 3g = -3$
$4d + 3g = 0$
$d = -3$

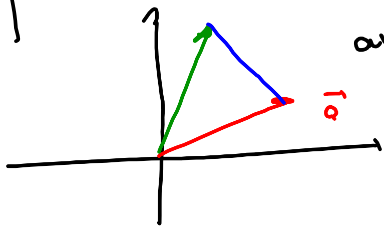
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Arealer og volumer

I 2- dimensjoner

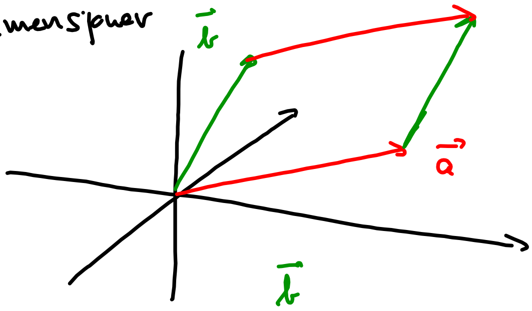


areal $= |\det(\vec{a},\vec{b})|$

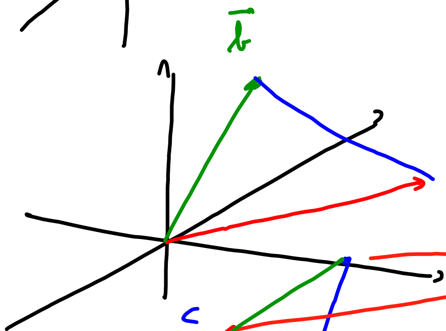


areal $= \frac{1}{2}|\det(\vec{a},\vec{b})|$

I 3 dimensjoner

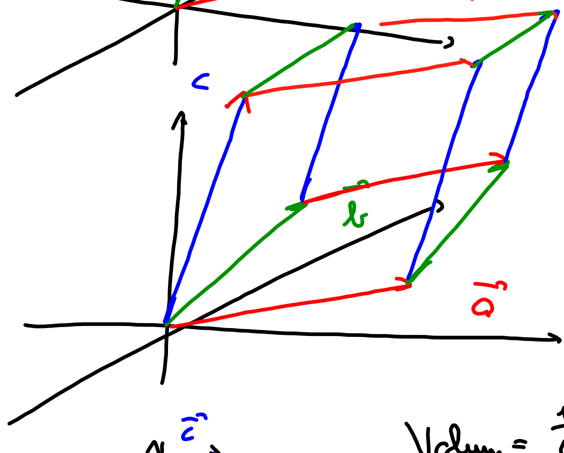


areal $= |\vec{a}\times\vec{b}|$



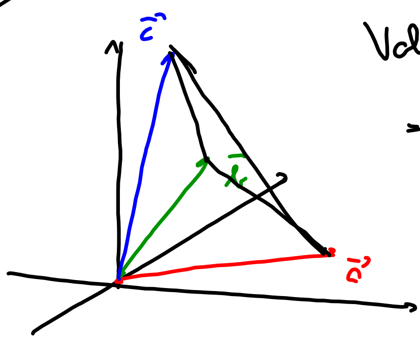
areal $= \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$

Volumer:



volum $= |\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$

$= |\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$



Volum $= \frac{1}{6}|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$

$= \frac{1}{6}|\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$

Retningsderivert

$$f'(\vec{a};\vec{r}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{a}+h\vec{r})-f(\vec{a})}{h}$$ "den retningsderiverte i punktet $\vec{a}$ og retningen $\vec{r}$"

Partiell derivert:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = f'(\vec{a},\vec{e}_i)$$ = den deriverte av f mhp x_i som alle de andre variablene er konstante.

Gradienten:

$$\nabla f(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})\right)$$

Dersom f er deriverbar i $\vec{a}$, så

$$f'(\vec{a},\vec{r}) = \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r}$$

Dette medfører at $\nabla f(\vec{a})$ peker i den retningen hvor funksjonen vokser raskest i $\vec{a}$.

Def: f er deriverbar i $\vec{a}$ dersom

$$\lim_{\vec{r}\to 0} \frac{\sigma(\vec{r})}{|\vec{r}|} = 0$$

der

$$\sigma(\vec{r}) = f(\vec{a}+\vec{r}) - f(\vec{a}) - \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r}$$

Setning: Dersom de partiellderiverte er definert i en omegn om $\vec{a}$ og er kontinuerlig i $\vec{a}$, så er f deriverbar.

Oppgave 2, 2018 : $f(x,y,z) = e^{5xy} + \sin z$

a) Finn gradienten $\nabla f(0,0,0)$.

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(e^{5xy}\cdot 5y, e^{5xy}\cdot 5x, \cos z\right)$$

$$\nabla f(0,0,0) = \underline{(0,0,1)}.$$

b) $\vec{r} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$: Finn $f'(\vec{0};\vec{r})$. Siden f er deriverbar, så

$$f'(\vec{0};\vec{r}) = \nabla f(\vec{0})\cdot\vec{r} = (0,0,1)\cdot\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \underline{\tfrac{1}{\sqrt{3}}}$$

I hvilken retning vokser f fortest i punktet 0?

I retningen $\nabla f(0,0,0) = \underline{(0,0,1)}$.

Hvis vi hadde fått $\nabla f(0,0,0) = \left(0,0,\frac{\sqrt{17}}{e^{35}}\right)$

Svar: $(0,0,1)$

Annenderiverte

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \\ \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a})$$

forutsatt at disse annenderiverte er kontinuerlig i $\vec{a}$

Jacobi-matriser:

$\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\vec{F}(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), F_2(\vec{x}), \ldots, F_m(\vec{x}))$$

$$\vec{F}'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Eksamen har 13 punkter som teller 10 poeng = 130 poeng ialt

Midtveis = 65 poeng

195 poeng