Motsigelsesbevis: Vi ønsker å bevise A. Vi antar "for motsigelse" at A ikke er sann og bruker denne antagelsen til å utlede en motsigelse.

Teorem $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt, dvs det finnes ingen hele tall a, b slik at $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

Bevis: Anta for motsigelse at det finnes hele tall a, b slik at $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Vi kan anta at a og b ikke har felles faktorer. Kvadrerer:

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

Dette betyr at a^2 er et partall, og dermed er a et partall, dvs $a = 2c$ for et helt tall c. Setter inn

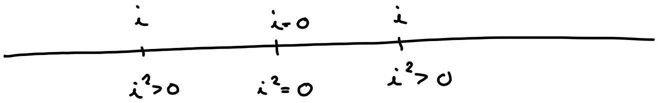
$$(2c)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4c^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2c^2$$

Altså er b^2 et partall, og dermed må b også være et partall. Dette betyr at 2 er en felles faktor i a og b, og det er en motsigelse siden vi startet med å anta at de ikke har felles faktor. Konklusjonen er at $\sqrt{2}$ er irrasjonal siden det motsatte fører til en motsigelse.

Komplekse tall

Finnes det en kvadratrot til -1, dvs finnes det et tall i slik at $i^2=-1$.

Det finnes ikke noe slikt tall på tallinjen



Hvorfor er dette verdt å undersøke:

$$ax^2+bx+c=0\quad,\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \qquad \text{1500-tallet.}$$

$$x=\ldots\sqrt{\ldots\sqrt{\cancel{-27}}} \qquad \sqrt{\sqrt{\cancel{-27}}}$$

La oss anta at det finnes en kvadratrot $i=\sqrt{-1}$, dvs $i^2=-1$.

Vi regner litt:

$z=a+ib$, der $a,b\in\mathbb{R}$, kalles et komplekst tall.

$w=c+id$

Addisjon: $z+w = a+ib+c+id = (a+c)+i(b+d)$

Eksempel: $z=3+4i$, $w=-2+i$: $\quad z+w = 3+4i-2+i = \underline{1+5i}$

Subtraksjon: $z-w = (a+ib)-(c+id) = a+ib-c-id$
$= (a-c)+i(b-d)$

Multiplikasjon: $zw = (a+ib)(c+id) = ac+iad+ibc+\underbrace{i^2bd}_{-bd}$
$= (ac-bd)+i(ad+bc)$

Eksempel: $\left.\begin{array}{l} z=2-i \\ w=2+4i\end{array}\right\}$ $zw = (2-i)(2+4i) = 4+8i-2i\underbrace{-4i^2}_{+4}$
$= \underline{8+6i}$

Divisjon: $\dfrac{z}{w} = \dfrac{a+ib}{c+id} \overset{\text{skikkelig triks}}{=} \dfrac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}$

$$= \frac{ac-iad+ibc\overbrace{-i^2bd}^{+bd}}{c^2-\cancel{icd}+\cancel{icd}\underbrace{-i^2d^2}_{+d^2}} = \frac{(ac+bd)+i(-ad+bc)}{c^2+d^2}$$

$$= \underbrace{\frac{ac+bd}{c^2+d^2}} + i\,\underbrace{\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}}$$

Eksempel: $z=3+2i$, $w=4-3i$: $\quad \dfrac{z}{w} = \dfrac{3+2i}{4-3i} = \dfrac{(3+2i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}$

$$= \frac{12+9i+8i\overbrace{+6i^2}^{-6}}{\underbrace{4^2-\underbrace{(3i)^2}_{9(-1)}}_{16+9}} = \frac{6+17i}{25} = \underline{\underline{\frac{6}{25}+i\frac{17}{25}}}$$

Ny operasjon: Konjugasjon $\left\langle \begin{array}{l} z=a+ib \\ \bar{z}=a-ib \quad \text{(det konjugerte tallet til } z\text{)}\end{array}\right.$

<u>Konjugerte:</u> $z = a+ib$
$\bar{z} = a-ib$

<u>Regneregler:</u> (i) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

(ii) $\overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$

(iii) $\overline{z\cdot w} = \bar{z}\cdot\bar{w}$

(iv) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

<u>Bevis:</u> (i) $z = a+ib$, $w = c+id$

$$\overline{z+w} = \overline{(a+ib)+(c+id)} = \overline{(a+c)+i(b+d)} = (a+c)-i(b+d)$$

$$\bar{z}+\bar{w} = \overline{a+ib} + \overline{c+id} = (a-ib)+(c-id) = \underline{(a+c)-i(b+d)}$$

(iii) $$\overline{z\cdot w} = \overline{(a+ib)(c+id)} = \overline{ac+iad+ibc+\underbrace{i^2bd}_{-bd}}$$

$$= \overline{(ac-bd)+i(ad+bc)} = \underline{(ac-bd)-i(ad+bc)}$$

$$\bar{z}\cdot\bar{w} = (a-ib)(c-id) = ac-iad-ibc+\underbrace{i^2bd}_{-bd}$$

$$= \underline{(ac-bd)-i(ad+bc)}$$

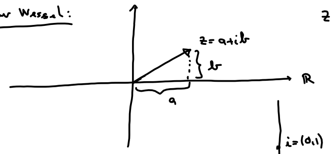
Geometrisk tolkning

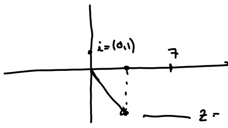
$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ $\quad a, b > 0$

Selvmotsigelse: $-1 = i^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} \overset{?}{=} \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$

Caspar Wessel:

$z = a + ib$





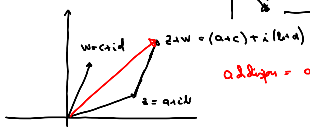
$7 = 7 + 0i$

$(7,0)$

$i = 0 + 1i$

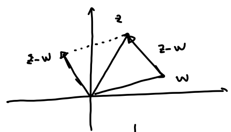
$(0,1)$

Addisjon:

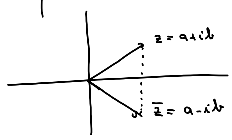


addisjon = addisjon av vektorer

Subtraksjon:

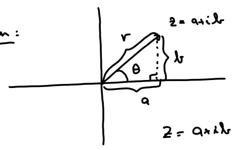


Konjugasjon.



Konjugasjon = speiling om x-aksen

Polarform:



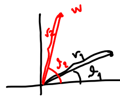
r, ϑ kalles polarkoordinater til z.

$\left.\begin{array}{l} a = r\cos\vartheta \\ b = r\sin\vartheta \end{array}\right\} \begin{array}{l} \cos\vartheta = \frac{a}{r} \\ \sin\vartheta = \frac{b}{r} \end{array}$

$z = a + ib = \underline{r\cos\vartheta + ir\sin\vartheta}$ polarformen til z.

Minner om: $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$

$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$

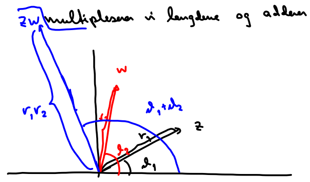


$z = r_1\cos\vartheta_1 + ir_1\sin\vartheta_1, \quad w = r_2\cos\vartheta_2 + ir_2\sin\vartheta_2$

$$
\begin{aligned}
z \cdot w &= (r_1\cos\vartheta_1 + ir_1\sin\vartheta_1)(r_2\cos\vartheta_2 + ir_2\sin\vartheta_2) \\
&= r_1r_2\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 + ir_1r_2\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2 \\
&\quad + ir_1r_2\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \underbrace{i^2}_{-}r_1r_2\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2 \\
&= r_1r_2[\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2] \\
&\quad + i\,r_1r_2[\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2 + \sin\vartheta_1\cos\vartheta_2] \\
&= \underbrace{r_1r_2}_{r}\cos(\underbrace{\vartheta_1+\vartheta_2}_{\vartheta}) + i\underbrace{r_1r_2}_{r}\sin(\underbrace{\vartheta_1+\vartheta_2}_{\vartheta})
\end{aligned}
$$

= det komplekse tallet med $r = r_1r_2$ og $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$

Regel: Når vi multipliserer to komplekse tall, zw multipliserer vi lengdene og adderer vinklene.



Terminologi: $r = \sqrt{a^2+b^2}$ kalles modulusen eller tallverdien til $z = a+ib$.

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

ϑ kalles argumentet til z.