2015, oppgave 7 : $\int \arccos\sqrt{x+1}\,dx$

$u = \arccos\sqrt{x+1}$

$\sqrt{x+1} = \cos u$

$x+1 = \cos^2 u$

$x = \cos^2 u - 1$

$dx = 2\cos u(-\sin u)$

$= -2\sin u\cos u$

$= -\int u \underbrace{2\sin u\cos u}_{\sin 2u}\,du = -\int u\sin 2u\,du$

2020, oppgave 2 :

$$V = \pi\int_a^b f(x)^2\,dx = \pi\int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx = \pi\left[-\frac{1}{x}\right]_a^b$$

$$= \pi\left[-\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right] = \underline{\pi\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]}$$

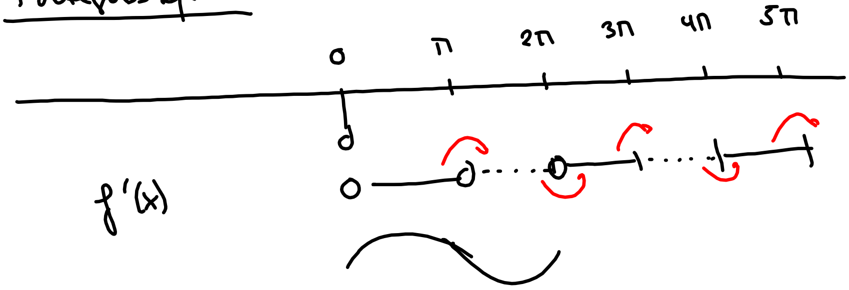
$$100 = \pi\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right] = \frac{\pi}{a} - \frac{\pi}{b} \qquad [\text{Setter } b = \pi]$$

$$100 = \frac{\pi}{a} - 1 \Rightarrow \frac{\pi}{a} = 101 \Rightarrow \underline{a = \frac{\pi}{101}}, \ \underline{\underline{b = \pi}}$$

2010, oppgave 9 : $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \ , \ x \geq 0$.

Derivert : $f'(x) = \frac{\sin x}{x}$ (samme fortegn som $\sin x$)

Fortegnsskjema:



2010, oppgave 10 : $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ } Vis at $\{a_n\}$ konvergerer. Hva $\lim_{n\to\infty} a_n$?

Sett $a = \lim a_n$:

$$\underline{a} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a_n} = \frac{1}{\underline{1+a}}$$

Löser : $a = \frac{1}{1+a} \ | \ 1+a \Rightarrow a + a^2 = 1 \Rightarrow a^2 + a - 1 = 0$

abc-formelen: $a = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-1)}}{2} = \underline{\underline{\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}}}$

Grensen må være enten $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ eller $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Siden leddene i følgen må være positive, har $\underline{a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

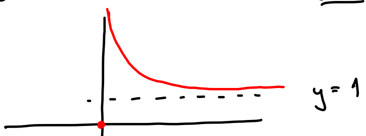
2009, nr 9: $f(x) = \frac{1}{x}\sqrt{x^2+1}$ for $x>0$, $f(0)=0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ asymptote, diskontinuerlig i 0.

Kva skjer når $x\to\infty$?: $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{1+1/x^2}}{\cancel{x}} = 1$

$y=1$ er en asymptote når $x\to\infty$.

Svar: diskont, to asymptoter.



2019, oppgave 8:

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{når } x=0 \\ \frac{ax\cos x}{\sin x}+2 & \text{når } 0<x<\frac{\pi}{2} \\ bx+1 & \text{når } \frac{\pi}{2}\le x\le 2 \end{cases}$$

a) For kva verdier av a og c er f kont. i 0.

Må ha $f(0) = \lim_{x\to0^+} f(x)$.

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{ax\cos x}{\sin x}+2\right) = \lim_{x\to0^+} a\cos x \lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x} + 2$$

1

$$= a\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\cos x}+2 = a+2$$

Vi får kontinuitet når $a+2=c$

b) Sjekk kontinuitet i $\frac{\pi}{2}$: $f(\frac{\pi}{2}) = b\frac{\pi}{2}+1$

Må sjekke når $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = b\frac{\pi}{2}+1$

og når $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = b\frac{\pi}{2}+1$ OK

$x > \frac{\pi}{2}$
$f(x) = bx+1$

Regner ut

0

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{ax\cos x}{\sin x}+2 = 2$$

For å få kontinuitet, må $2 = b\frac{\pi}{2}+1 \Rightarrow b\frac{\pi}{2} = 1 \mid \cdot\frac{2}{\pi}$

$b=\frac{2}{\pi}$

Vi skal også ha at f er deriverbar i $\frac{\pi}{2}$:

Må sjekke om $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}$ finnes

$f(\frac{\pi}{2}) = b\cdot\frac{\pi}{2}+1 = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}+1 = 2$

Sjekker einsidige grenser:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\left(\frac{ax\cos x}{\sin x}+2\right)-2}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{ax\cos x}{\sin x}}{x-\frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{ax}{\sin x}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = \frac{a\frac{\pi}{2}}{1}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{-\sin x}{1}$$

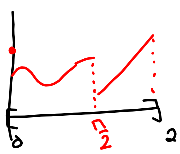
$$= \frac{\pi a}{2}(-1) = -\frac{\pi a}{2}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\left(\frac{2}{\pi}x+1\right)-2}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\frac{2}{\pi}x-1}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim\frac{\frac{2}{\pi}}{1} = \frac{2}{\pi}$$

Deriverbar når: $-\frac{\pi a}{2} = \frac{2}{\pi} \Rightarrow a = -\frac{4}{\pi^2}$, $b = \frac{2}{\pi}$

$c = a+2 = 2-\frac{4}{\pi^2}$

c) Vis at f er ~~deriverbar~~ integrerbar for alle valg av a, b, c:



integrerbar fordi den er integrerbar på kvart av delintervall $[0,\frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2},2]$.

Kont 2020, oppgave 7

$$f(x) = \int_0^x \frac{1+\sin^2 t}{1+t^2}\,dt - 1$$

a) Analysens fundamentalteorem: $f'(x) = \frac{1+\sin^2 x}{1+x^2} > 0$

Voksende på hele $\mathbb{R}$

b) Siden f er strengt voksende, kan den ikke ha mer enn ett nullpunkt.

Ser $f(0) = \int_0^0 \frac{1+\sin^2 t}{1+t^2}\,dt - 1 = \underline{-1}$

Hva skjer når $x \to \infty$: $\underline{f(x)} = \int_0^x \frac{1+\sin^2 t}{1+t^2}\,dt - 1$

$$\geq \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt - 1$$

$$= \underbrace{\arctan x}_{\frac{\pi}{2}} - 1 \to \frac{\pi}{2} - 1 > 0$$

Ved å velge x $\underline{\text{stor nok}}$, får vi at $f(x) \geq \arctan x - 1 > 0$

Skjæringssetningen sier at f har et nullpunkt mellom 0 og slik x der $\arctan x - 1 > 0$.

c) Asymptoter? Ingen vertikale siden f er kont. på hele $\mathbb{R}$.

Men hva med $x \to \infty$ og $x \to -\infty$.

$f(x) = \int_0^x \frac{1+\sin^2 t}{1+t^2}\,dt$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \underbrace{\int_0^\infty \frac{1+\sin^2 t}{1+t^2}\,dt}_{\text{konvergerer?}} = A$

$$\underbrace{\int_0^\infty \frac{1+\sin^2 t}{1+t^2}\,dt}_{\text{konvergerer.}} \leq \underbrace{\int_0^\infty \frac{2}{1+t^2}\,dt}_{\text{konvergerer}}$$

Når $x \to \infty$ er $y = A$ (der $A = \int_0^\infty \frac{1+\sin^2 t}{1+t^2}\,dt$) en asymptote.

Hva med $x \to -\infty$? $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \int_0^x \frac{1+\sin^2 t}{1+t^2}\,dt - 1$

Variabel skifte: $u = -t$: $du = -dt$

$$f(x) = \int_0^x \frac{1+\sin^2 t}{1+t^2}\,dt - 1 = \int_0^{-x} \frac{1+\sin^2 u}{1+u^2}(-du) - 1$$

$$= -\int_0^{-x} \frac{1+\sin^2 u}{1+u^2}\,du - 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\underbrace{\lim_{x\to-\infty} \int_0^{-x} \frac{1+\sin^2 u}{1+u^2}\,du}_{} - 1 = \underline{\underline{-A-1}}$$

Prøveeksamen 2, 2017, oppgave 8: $f, g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) > 0$.

Gitt $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ voksende

Vis at $H(x) = \dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt}$ er voksende

Sett: $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$, dvs $H(x) = \dfrac{F(x)}{G(x)}$.

Deriver: $H'(x) = \dfrac{F'(x)G(x) - F(x)G'(x)}{G(x)^2}$. Må vise

$F'(x)G(x) - F(x)G'(x) > 0 \iff F'(x)G(x) > F(x)G'(x) \quad : \frac{1}{G(x)G'(x)}$

$\dfrac{F'(x)}{G'(x)} > \dfrac{F(x)}{G(x)} \iff \boxed{\dfrac{f(x)}{g(x)} > \dfrac{F(x)}{G(x)}}$

$G(x)G'(x) = G(x)g(x)$, $G(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$

Nok å vise.

Cauchy's middelverdisetning: $\dfrac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \dfrac{F'(c)}{G'(c)}$ for en c mellom a og b.

$0 \quad c \quad x$

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x)-F(0)}{G(x)-G(0)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f(c)}{g(c)} < \frac{f(x)}{g(x)}$$

voksende

Altså: $\dfrac{f(x)}{g(x)} > \dfrac{F(x)}{G(x)}$, som er det det var nok å vise.