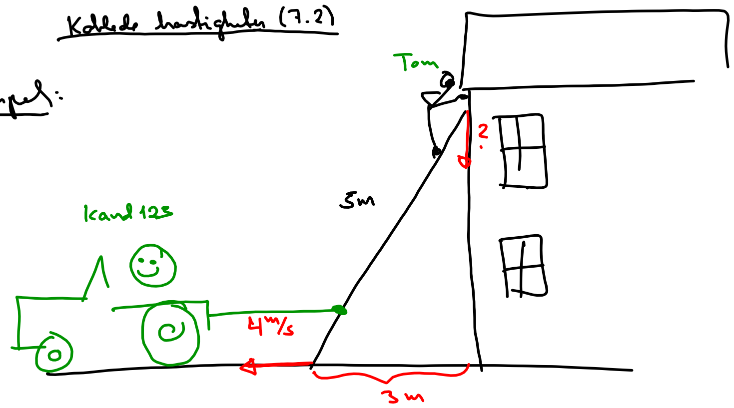
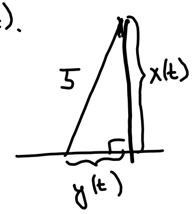
Koblede hastigheter (7.2)

Eksempel:



Problemstilling: kjenner $y'(t)$, vil finne $x'(t)$.



Finner en generell sammenheng mellom $x(t)$ og $y(t)$:

$$x(t)^2 + y(t)^2 = 25 \qquad \text{Pytagoras}$$

Deriverer: $\cancel{2}x(t)x'(t) + \cancel{2}y(t)y'(t) = 0$

Løser for $x'(t)$:

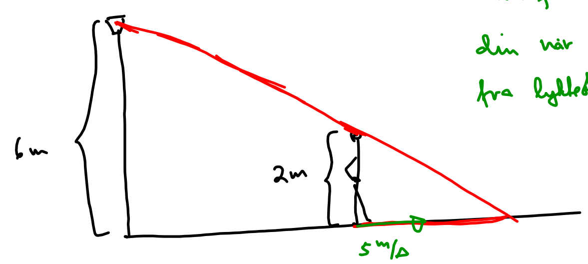
$$x'(t) = -\frac{y(t)y'(t)}{x(t)}$$

Er interessert i: $x'(t)$ når $y(t) = 3$.

$$x'(t) = -\frac{3\cdot\cancel{4}}{\cancel{4}} = -3 \text{ m/s}$$

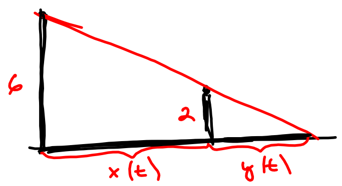
Mellomregning for å finne $x(t)$:
$x(t)^2 + y(t)^2 = 25$
$x(t)^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow x(t)^2 = 16$
$x(t) = 4$.

Eksempel:



Hvor fort vokser skyggen din når du er 10 m fra lyktestolpen?

Generell



kjenner $x'(t)$, må finne $y'(t)$?

Formlike trekanter:

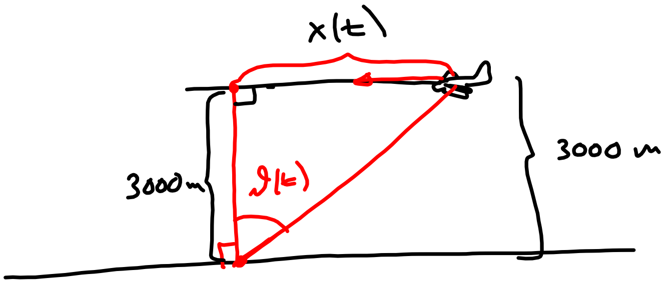
$$\frac{y(t)}{2} = \frac{x(t)+y(t)}{6} \quad \Big| \cdot 6$$

$$3y(t) = x(t) + y(t)$$

$$2y(t) = x(t)$$

Deriverer: $2y'(t) = x'(t) \Rightarrow y'(t) = \frac{x'(t)}{2} = \frac{5}{2}\text{ m/s} = 2{,}5 \text{ m/s}$

Eksempel:



$\vartheta'(t) = 0.025\ \mathrm{rad/s}$

Hvor fort flyr flyet når $\vartheta = \frac{\pi}{3}$.

Kjenner $\vartheta'(t)$, vil finne $x'(t)$.

Sammenheng:

$$\tan \vartheta(t) = \frac{x(t)}{3000}$$

Deriverer.
$$\frac{1}{\cos^2 \vartheta(t)} \cdot \vartheta'(t) = \frac{x'(t)}{3000} \quad \Big|\, 3000$$

$$x'(t) = \frac{3000}{\cos^2 \vartheta(t)} \cdot \vartheta'(t)$$

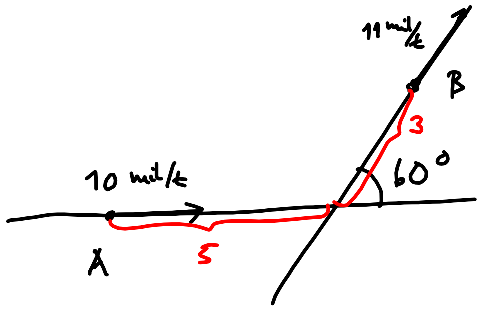
Vet $\vartheta'(t) = 0.025\ \mathrm{rad/sek}$.

$\vartheta(t) = \frac{\pi}{3}$ $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

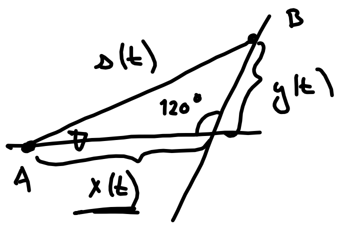
Dermed:

$$x'(t) = \frac{3000}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot 0.025 = \overbrace{4 \cdot 3000 \cdot 0.025} = 3000 \cdot 0.1$$
$$= \underline{300\ \mathrm{m/s}}$$

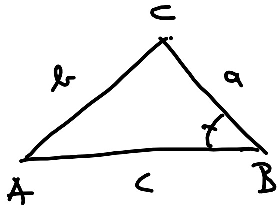
7.2.15



Hva er avstanden mellom skipene?



Cosinussetningen:

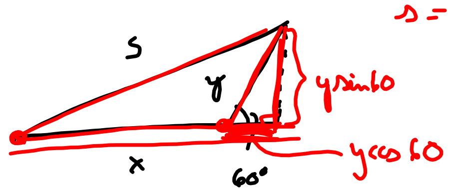


$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$s^2 = x^2 + y^2 - 2xy\underbrace{\cos 120^\circ}_{(-\frac{1}{2})}$$

$$= x^2 + y^2 + xy$$

Vi som har glemt cosinussetning: Pytagoras:



$$s^2 = \left(y\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(x + y\tfrac{1}{2}\right)^2$$

$$= y^2\frac{3}{4} + x^2 + xy + \frac{y^2}{4}$$

$$\underline{x^2 + y^2 + xy}$$

a) s når $x = 5$, $y = 3$:

$$s^2 = 5^2 + 3^2 + 5\cdot 3 = 25 + 9 + 15 = 49 \Rightarrow \underline{s = 7 \text{ mil.}}$$

b) Hva er s' i dette øyeblikket.

$$s(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2 + x(t)y(t)$$

Deriverer:

$$2s(t)s'(t) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) + x'(t)y(t) + x(t)y'(t)$$

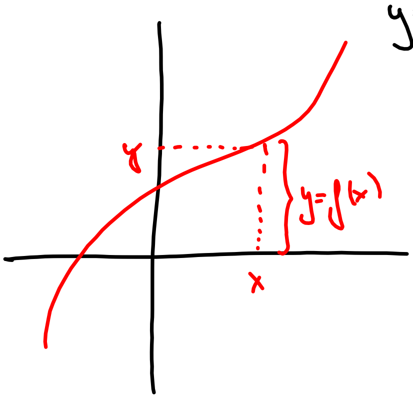
$$s'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) + x'(t)y(t) + x(t)y'(t)}{2s(t)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) = 5 \\ y(t) = 3 \\ s(t) = 7 \\ x'(t) = -10 \\ y'(t) = 11 \end{array}}$$

$$= \frac{2\cdot 5(-10) + 2\cdot 3\cdot 11 + (-10)\cdot 3 + 5\cdot 11}{2\cdot 7}$$

$$= \frac{-100 + 66 - 30 + 55}{14} = \frac{-130 + 121}{14} = \underline{-\frac{9}{14}} \text{ mil/t}$$

Omvendte funksjoner (seksjon 7.4)

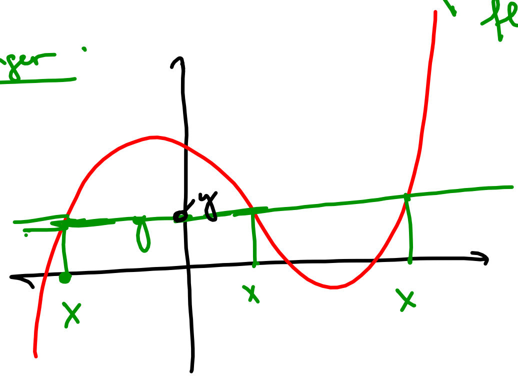


Gitt x, kan vi regne ut y slik at $y=f(x)$.

Noen ganger er y gitt, og vi ønsker å finne x slik at $\underbrace{y=f(x)}$, Løser ligning, finner $x = g(y)$.

Problemer: → greier ikke å løse ligning
→ flere løsning

Flere løsninger:

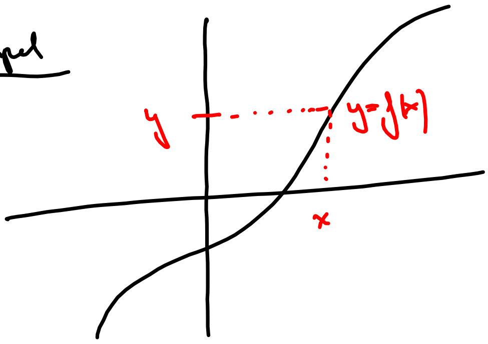


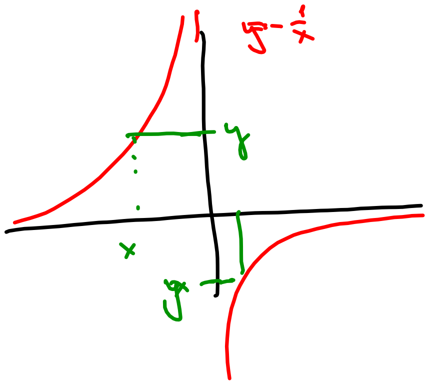
$f(x)=y$ for tre verdier av x.

Notasjon: $f: D_f \to V_f$

Definisjon: $f: D_f \to V_f$ kalles injektiv dersom det til hver $y \in V_f$ kan finnes en $x \in D_f$ slik at $y=f(x)$.

Eksempel





Setning: Enhver strengt voksende eller strengt avtagende funksjon er injektiv.

Eksempel: Vis at funksjonen $f(x)=x^3+x$ er injektiv:

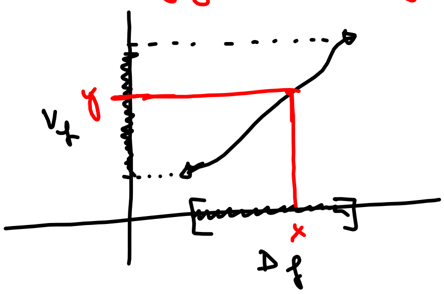
$f'(x) = 3x^2+1 > 0$, f er strengt voksende, altså injektiv.

Definisjon: Anta at $f: D_f \to V_f$ er injektiv. Da er den omvendte funksjonen $g: V_f \to D_f$ definert ved at

$$g(y) = x \text{ der } x \text{ er det eneste elementet i } D_f \text{ slik at } y = f(x).$$

kortere

$$g(y) = x \iff y = f(x)$$



Eksempel: Finn den omvendte funksjonen til $f(x) = 3x + 2$.

$$y = 3x + 2 \overset{\text{Løser for } x}{\Longrightarrow} 3x = y - 2 \Rightarrow x = \frac{y-2}{3} \Rightarrow g(y) = \frac{y-2}{3}$$

Eksempel: Finn den omvendte funksjonen til $f(x) = 4e^{2x+3} + 2$

(voksende funksjon $\Rightarrow$ injektiv).

$$y = 4e^{2x+3} + 2 \quad (\text{løser for } x)$$

$$\frac{y-2}{4} = e^{2x+3}$$

$$\ln \frac{y-2}{4} = 2x + 3 \Rightarrow x = \frac{\ln \frac{y-2}{4} - 3}{2}, \quad g(y) = \frac{\ln \frac{y-2}{4} - 3}{2}$$