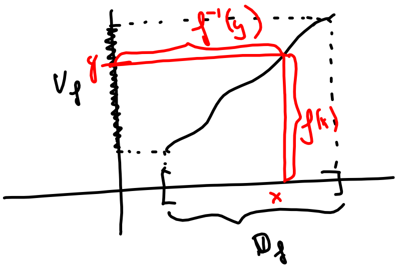
Omvendte funksjoner

Forrige gang: En funksjon $f: D_f \to V_f$ kalles injektiv dersom det til hver $y \in V_f$ finnes bare én x slik at $f(x) = y$. I så fall defineres den omvendte funksjonen $f^{-1}: V_f \to D_f$ ved $f^{-1}(y) = x$. Hvis f ikke er injektiv, finnes det ingen omvendt funksjon



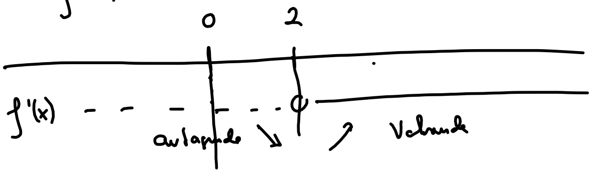
Hvis f er strengt voksende eller strengt avtagende, så er f injektiv

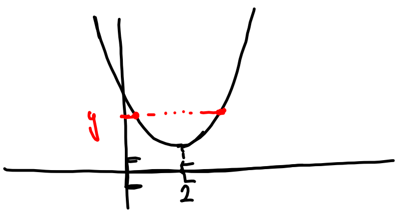
Eksempel: $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ er definert ved $f(x) = x^2 - 4x + 5$

Har f en invers funksjon?

Deriverer for å se hvor funksjonen er voksende og avtagende.

$$f'(x) = 2x - 4 = 2(x-2)$$





Funksjonen er ikke injektiv og har ingen invers funksjon. Definer $h: [2,\infty) \to \mathbb{R}$ ved $h(x) = x^2 - 4x + 5$, så er h strengt voksende og dermed injektiv og har dermed en invers funksjon.

La oss finne den inverse til h:

$$y = x^2 - 4x + 5 \qquad | \text{ Løser for } x$$

$$x^2 - 4x + (5-y) = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (5-y)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20 + 4y}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{4y-4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{y-1}}{2} = 2 \pm \sqrt{y-1}$$

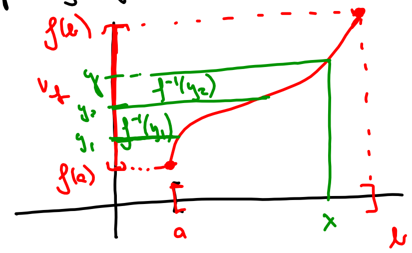
Siden x skal ligge i $D_h = [2,\infty)$, må vi velge

$$x = 2 + \sqrt{y-1}$$

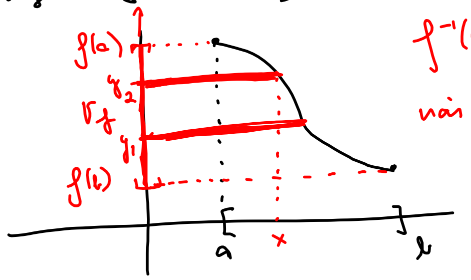
dvs $\quad h^{-1}(y) = 2 + \sqrt{y-1}$

Teorem: Dersom $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er strengt voksende og kontinuerlig. Da er $V_f=[f(a),f(b)]$ og den omvendte funksjonen

$f^{-1}[f(a),f(b)]\to[a,b]$ er strengt voksende og kontinuerlig.



Dersom $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er strengt avtagende og kontinuerlig, så er $V_f=[f(b),f(a)]$ og $f^{-1}:[f(b),f(a)]\to[a,b]$ er også strengt avtagende og kontinuerlig.

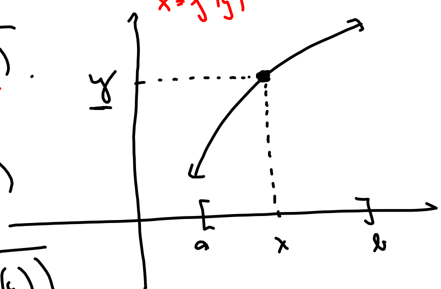


$f^{-1}(y_1)>f^{-1}(y_2)$

når $y_1<y_2$

Teorem: Anta at $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er en injektiv funksjon som er deriverbar i alle indre punkter $x\in(a,b)$. Hvis $f'(x)\neq 0$, så er f^{-1} deriverbar i punktet $\underbrace{y=f(x)}_{x=f^{-1}(y)}$ og

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

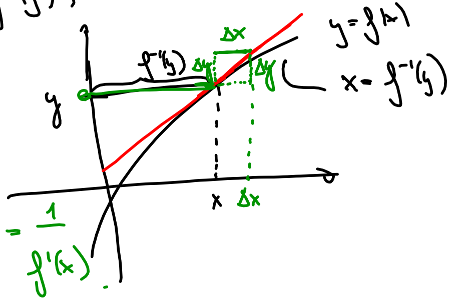


Varianter:

$$(f^{-1})'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$$

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Geometrisk tolkning av f^{-1}:



$$f'(x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$(f^{-1})'(y)=\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x)}.$$

Regnemessig argument:

$$x=f^{-1}(\underbrace{f(x)}_{y}) \quad \text{deriverer}$$

$$1=(f^{-1})'(f(x))\,f'(x) \Rightarrow (f^{-1})'(\overbrace{f(x)}^{y})=\frac{1}{f(x)}$$

Eksempel: Vis at $f(x) = xe^{3x} + 2$ er injektiv på $[-\frac{1}{3}, \infty)$. Regn ut $(f^{-1})'(2)$ $f(0) = 2$

Deriverer: $f'(x) = 1e^{3x} + x\,3e^{3x} = e^{3x}(1 + 3x)$
$= 3e^{3x}(x + \frac{1}{3})$

$-1/3$

$f'(x)$ - - - - 0 ——————

f strengt voksende, f injektiv på $[-\frac{1}{3}, \infty)$.

$(f^{-1})'(\overset{2}{y}) = \frac{1}{f'(x)}$ der $\overset{2}{y} = f(\overset{0}{x})$

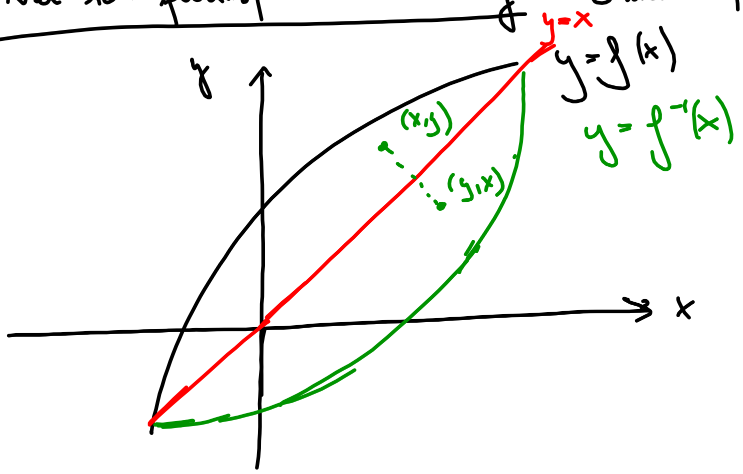
$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3\underbrace{e^{3\cdot 0}}_{1}(0 + \frac{1}{3})} = \frac{1}{1}$

Funksjonen f.eks $f(x) = e^x$

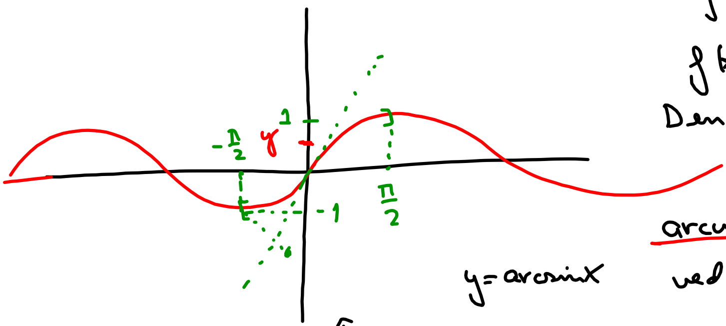
Nei til funksjonsdiskriminering!

Omvendte funksjonen $f^{-1}(y) = 2 + \sqrt{y-1}$

$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-1}$



Arcusfunksjoner (7.6)



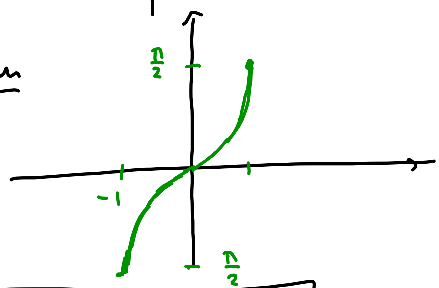
La $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$f(x) = \sin x$

Den omvendte funksjonen til $f(x)$ kalles arcussinus og betegnes ved $\underbrace{\arcsin}_{\sin^{-1}}(x)$

$y = \arcsin x$

Grafen



$$\boxed{f'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad y = f(x)}$$

Hva er $(\arcsin x)'$?

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{(\sin x)'} \qquad \underline{y = \sin x}$$

$$= \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$$

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

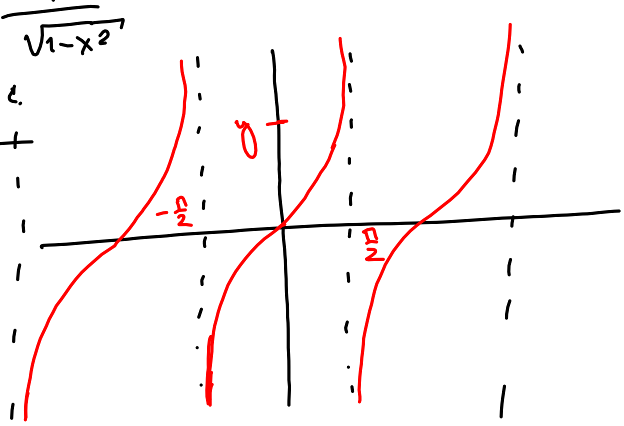
$$= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Altså

$$(\arcsin(y))' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$D\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Hva med tangens?



La $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x) = \tan x$

Den omvendte funksjonen kalles arcustangens og betegnes med $\arctan(x)$

Kan vi finne den deriverte?

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(x)} \qquad \text{der } \underline{y = \tan x}$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\boxed{\tan'(x) = 1 + \tan^2 x}$$

Altså

$$D\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$$