UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1100 — Kalkulus
Eksamensdag:	Onsdag 1. desember 2021
Tid for eksamen:	15.00 – 19.00
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Alle

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle punktene (1a, 1b, 2a osv.) teller i utgangspunktet likt i sensuren. Dersom det er et punkt du ikke får til, kan du likevel bruke resultatene derfra i senere punkter. Husk å begrunne svarene dine.

Alle hjelpemidler er tillatt (bøker, notater, kalkulator, dataprogrammer osv.), men du har ikke lov til å kommunisere med andre under eksamen (dette inkluderer å stille eller besvare spørsmål på nettsider). Du må gjerne bruke dataprogrammer, men du må forklare hvilke programmer du bruker og hvilken input du gir dem, slik at det mulig å følge argumentasjonen din. Svar som viser matematisk forståelse og matematiske ferdigheter, vil gi bedre uttelling enn svar som bare krever inntasting i et dataprogram. Svar som ikke er begrunnet, vil få null poeng i sensuren.

Oppgave 1 (20 poeng) I denne oppgaven er $f(x,y) = x^2y$.

a) I hvilken retning vokser f raskest i punktet $\mathbf{a} = (-4, 1)$?

b) Finn den retningsderiverte $f'(\mathbf{a}; \mathbf{r})$ der $\mathbf{a} = (-4, 1)$ og $\mathbf{r} = (2, 3)$. Finn også en vektor $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ slik at $f'(\mathbf{a}; \mathbf{s}) = 0$.

Oppgave 2 (30 poeng)

a) Finn volumet til omdreiningslegemet som dannes når området under grafen til $f(x) = \ln x$, $1 \leq x \leq 2$, dreies rundt y-aksen.

b) Avgjør om det uegentlige integralet $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^4}\ dx$ konvergerer eller divergerer.

c) Vis at hvis $u(x) = \int_0^x e^{t^2}\, dt$, så er

$$\int_0^x u(t)\, dt = xu(x) - \frac{e^{x^2}}{2} + \frac{1}{2}$$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3 (20 poeng) Vi sier at vektoren $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ er en *egenvektor* for 2×2-matrisen M dersom $M\mathbf{v}$ er parallell med $\mathbf{v}$, dvs. dersom det finnes et tall $k \in \mathbb{R}$ slik at $M\mathbf{v} = k\mathbf{v}$. Dette tallet k kalles *egenverdien* til $\mathbf{v}$.

a) Finn en egenvektor $\mathbf{v}$ til matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 1.1 & 1.2 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$

som har egenverdi $k = 1.4$ (det finnes mer enn én løsning).

b) Vi studerer en modell for hvordan en dyrebestand utvikler seg fra år til år. Vi deler bestanden i to kategorier, *unge dyr* og *gamle dyr*. Anta at det i år n er x_n unge dyr og y_n gamle dyr. Modellen sier da at det i år $n+1$ vil være x_{n+1} unge dyr og y_{n+1} gamle dyr der

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 & 1.2 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Anta at det i år 0 finnes 4000 unge og 1000 gamle dyr. Hvor mange dyr av hver type finnes det i år 1 og i år 2? Hvor mange finnes det i år n?

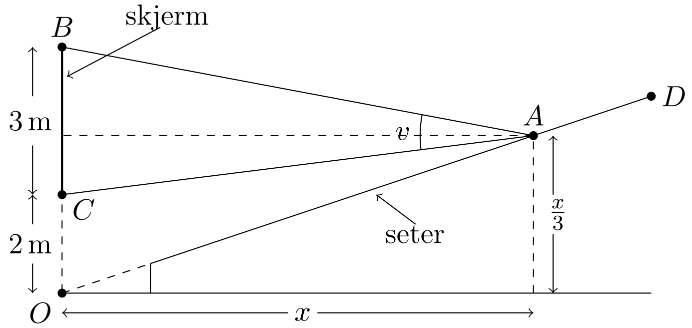
Oppgave 4 (30 poeng). Anta at a er et reelt tall og at f_a er funksjonen definert for $x \neq 0$ ved

$$f_a(x) = \arctan \frac{\frac{x}{3} - a}{x}$$

a) Vis at

$$f_a'(x) = \frac{9a}{10x^2 - 6ax + 9a^2}$$

Figuren viser et auditorium sett fra siden. Når du sitter, vil øyet ditt A befinne seg på den rette linjen OD som har et stigningstall på $\frac{1}{3}$. En 3 meter høy skjerm henger 2 meter over bakken, og du ønsker å sitte slik at den vinkelen $v = \angle BAC$ som skjermen spenner ut, blir størst mulig.



b) Vis at dersom du setter deg x meter fra skjermen, så er vinkelen v gitt ved

$$v = \arctan \frac{\frac{x}{3} - 2}{x} + \arctan \frac{5 - \frac{x}{3}}{x} = f_2(x) - f_5(x)$$

c) Hvor langt må du sitte fra skjermen for at vinkelen v skal bli størst mulig? Tror du dette er et lurt valg i praksis?

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 5 (30 poeng) Funksjonen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} x^{3/2} \sin \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{for } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

a) Finn $f'(x)$ for $x \neq 0$ og vis at $\lim_{x\to 0} f'(x)$ ikke eksisterer.

b) Vis at f er deriverbar i 0 og at $f'(0) = 0$.

c) Anta at $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon som er deriverbar i alle punkter unntatt muligens i punktet a. Vis at dersom $\lim_{x\to a} g'(x) = b$, så er g deriverbar også i a, og $g'(a) = b$.

Slutt