Eksamen i MAT1100 H21: Løsningsforslag

Oppgave 1 a) Vi må først finne gradienten til f:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = (2xy, x^2)$$

I punktet $\mathbf{a} = (-4,1)$ er gradienten $\nabla f(-4,1) = (-8,16) = 8(-1,2)$, og funksjonen vokser dermed raskest i retningen $(-1,2)$ (som er det samme som i retningen $(-8,16)$).

b) Siden funksjonen er deriverbar, er

$$f'(\mathbf{a};\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} = (-8,16)\cdot(2,3) = -16+48 = 32$$

Den retningsderiverte vil være null i retninger som står normalt på gradienten, f.eks. $\mathbf{s} = (2,1)$:

$$f'(\mathbf{a};\mathbf{s}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{s} = (-8,16)\cdot(2,1) = -16+16 = 0$$

Oppgave 2 a) I følge formelen $V = 2\pi\int_a^b x f(x)\,dx$ for volumet til omdreiningslegemer om y-aksen, er

$$V = 2\pi\int_1^2 x\ln x\,dx$$

Bruker vi delvis integrasjon med $u = \ln x$ og $v' = x$, får vi $u' = \frac{1}{x}$ og $v = \frac{x^2}{2}$. Dermed er

$$V = 2\pi\int_1^2 x\ln x\,dx = \left[2\pi \ln x \cdot \frac{x^2}{2}\right]_1^2 - 2\pi\int_1^2 \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\,dx$$

$$= 4\pi\ln 2 - \pi\int_1^2 x\,dx = 4\pi\ln 2 - \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 4\pi\ln 2 - \frac{3}{2}\pi$$

b) Integralet konvergerer. Den raskeste måten å se dette på er ved å sammenligne integralet av $\frac{x}{x^4+1}$ med (det konvergente) integralet av $\frac{1}{x^3}$, men det er også mulig å bruke substitusjonen $u = x^2$ til å regne ut integralet:

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^4}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{x}{1+x^4}\,dx$$

$$= \lim_{a\to\infty}\int_0^{a^2} \frac{\frac{1}{2}}{1+u^2}\,du = \lim_{a\to\infty}\frac{1}{2}\arctan(a^2) = \frac{\pi}{4}$$

c) **Metode 1:** Vi bruker delvis integrasjon med $u = u(t)$ og $v' = 1$. Da er $u'(t) = e^{t^2}$ og $v(t) = t$, og vi får:

$$\int_0^x u(t)\,dt = \Big[tu(t)\Big]_0^x - \int_0^x te^{t^2}\,dt = xu(x) - 0\cdot u(0) - \left[\frac{1}{2}e^{t^2}\right]_0^x = xu(x) - \frac{e^{x^2}}{2} + \frac{1}{2}$$

Metode 2: Vi skal vise at funksjonene $f(x) = \int_0^x u(t)\,dt$ og $g(x) = xu(x) - \frac{e^{x^2}}{2} + \frac{1}{2}$ er like. Deriverer vi, får vi:

$$f'(x) = u(x)$$

$$g'(x) = 1 \cdot u(x) + xu'(x) - \frac{e^{x^2}}{2} \cdot 2x = u(x) + xe^{x^2} - xe^{x^2} = u(x).$$

Siden de deriverte er like, skiller funksjonene seg med høyst en konstant C, dvs. $f(x) = g(x) + C$. Siden $f(0) = \int_0^0 e^{t^2}\,dt = 0$ og $g(0) = 0 \cdot u(0) - \frac{e^{0^2}}{2} + \frac{1}{2} = 0$, må $C = 0$, og følgelig er $f(x) = g(x)$ for alle x.

Oppgave 3 a) Vi er på jakt etter en vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ slik at

$$\begin{pmatrix} 1.1 & 1.2 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1.4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ganger vi ut, får vi

$$\begin{pmatrix} 1.1x + 1.2y \\ 0.3x + 0.2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.4x \\ 1.4y \end{pmatrix},$$

som gir ligningene

$$\begin{aligned} 1.1x + 1.2y &= 1.4x \\ 0.3x + 0.2y &= 1.4y \end{aligned}$$

Begge disse ligningene er ekvivalente med $x = 4y$, så vi kan la $\mathbf{v}$ være en hvilken som helst vektor der førstekomponenten er fire ganger annenkomponenten, f.eks. $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Legg merke til at $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4000 \\ 1000 \end{pmatrix}$ er en egenvektor med egenverdi 1.4. Dermed er

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 1.4 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5600 \\ 1400 \end{pmatrix}$$

Siden $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ er en ny egenvektor med egenverdi 1.4, blir

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 1.4 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 1.4^2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7840 \\ 1960 \end{pmatrix}$$

Fortsetter vi på denne måten, får vi

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = 1.4^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 1.4^n \begin{pmatrix} 4000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

Grunnen til dette er at vektorene vi får, hele tiden er egenvektorer til matrisen, og at det å gange med matrisen derfor er det samme som å gange med 1.4. Dette betyr at det i år n er $1.4^n \cdot 4000$ unge dyr og $1.4^n \cdot 1000$ gamle dyr.

Oppgave 4 a) Kjerneregelen i kombinasjon med brøkregelen og litt opprydning gir

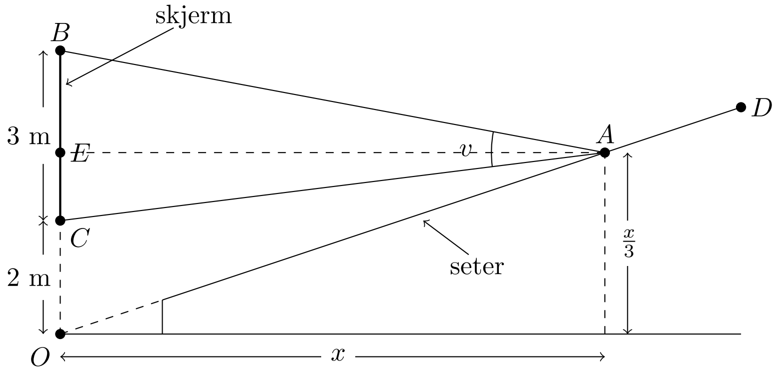
$$f_a'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{\frac{x}{3}-a}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{\frac{1}{3}\cdot x - \left(\frac{x}{3}-a\right)\cdot 1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{\frac{x}{3}-a}{x}\right)^2} \cdot \frac{a}{x^2}$$

$$= \frac{a}{x^2+\left(\frac{x}{3}-a\right)^2} = \frac{a}{\frac{10}{9}x^2 - \frac{2}{3}ax + a^2} = \frac{9a}{10x^2-6ax+9a^2}$$

b) På figuren nedenfor har jeg lagt inn et nytt punkt E på skjermen slik at $v = \angle CAE + \angle BAE$. Siden $\tan\angle CAE = \frac{\frac{x}{3}-2}{x}$ og $\tan\angle BAE = \frac{5-\frac{x}{3}}{x}$, er $\angle CAE = \arctan\frac{\frac{x}{3}-2}{x}$ og $\angle BAE = \arctan\frac{5-\frac{x}{3}}{x}$. Dermed får vi

$$v = \angle CAE + \angle BAE = \arctan\frac{\frac{x}{3}-2}{x} + \arctan\frac{5-\frac{x}{3}}{x} = f_2(x) - f_5(x),$$

der vi i den siste overgangen har brukt at arctan er en odde funksjon (dvs. at $\arctan(-x) = -\arctan x$ for alle x).



c) Vi deriverer uttrykket for v ved hjelp av formelen i a) og setter deretter på felles brøkstrek:

$$v'(x) = f_2'(x) - f_5'(x) = \frac{18}{10x^2-12x+36} - \frac{45}{10x^2-30x+225}$$

$$= \frac{(180x^2-540x+4050)-(450x^2-540x+1620)}{(10x^2-12x+36)(10x^2-30x+225)}$$

$$= \frac{-270x^2+2430}{(10x^2-12x+36)(10x^2-30x+225)}$$

Dette uttrykket er null når $x^2 = \frac{2430}{270} = 9$, så vi har et maksimum- eller minimumspunkt for $x = 3$ (alternativet $x = -3$ gir ikke mening i det opprinnelige problemet). En fortegnsdrøfting viser at $x = 3$ er et lokalt maksimum.

Vinkelen er altså størst når vi sitter 3 meter fra skjermen og 1 meter over bakken, dvs. 1 meter under bunnen på skjermen. Siden jeg er nærsynt og liker å ligge godt tilbakelent i stolen, passer dette ganske godt for meg, men andre vil nok foretrekke en plass lengre bak i salen der de kan se rett frem på skjermen. (Legg for øvrig merke til at løsningen vår ikke stemmer med situasjonen på figuren siden punkt A ligger lavere enn punkt C, men det er lett å sjekke at formelen $v = f_2(x) - f_5(x)$ gjelder i dette tilfellet også.)

Oppgave 5. I denne oppgaven hadde det dessverre sneket seg inn en feil i oppgaveteksten som ble oppdaget så sent at det var umulig å gjøre noe med det under eksamen. Funksjonsuttrykket i a) gir bare mening for positive x siden vi ellers får negative tall inni kvadratrøttene. Den enkleste måten å rette dette på er ved å sette inn tallverditegn i oppgaveteksten:

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{3/2} \sin \frac{1}{\sqrt{|x|}} & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

som også kan skrives:

$$f(x) = \begin{cases} x^{3/2} \sin \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \\ (-x)^{3/2} \sin \frac{1}{\sqrt{-x}} & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

Nedenfor løser vi den rettede versjonen av oppgaven, men de som bare tok den opprinnelige versjonen for god fisk, vil selvfølgelig også få full uttelling (det tilsvarer å bare bruke $x > 0$-delen av løsningen nedenfor).

a) Bruker vi at $(\frac{1}{\sqrt{x}})' = (x^{-1/2})' = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$, ser vi at for $x > 0$, er

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{2}x^{1/2} \sin \frac{1}{\sqrt{x}} + x^{3/2} \cos \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right) \\ &= \frac{3}{2}x^{1/2} \sin \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \cos \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Siden $x^{1/2}$ går mot 0 og $\sin \frac{1}{\sqrt{x}}$ alltid er mindre enn 1 i tallverdi, går det første leddet mot 0 når x går mot 0 ovenfra, mens det andre leddet fluktuerer uendelig mange ganger mellom ytterpunktene $-\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{2}$. Grenseverdien $\lim_{x \to 0^+} f'(x)$ eksisterer derfor ikke, og da vil heller ikke den tosidige grensen $\lim_{x \to 0} f'(x)$ eksistere.

For $x < 0$ får vi tilsvarende:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{2}(-x)^{1/2}(-1) \sin \frac{1}{\sqrt{-x}} + (-x)^{3/2} \cos \frac{1}{\sqrt{-x}} \cdot \left(-\frac{1}{2}(-x)^{-3/2}(-1)\right) \\ &= -\frac{3}{2}(-x)^{1/2} \sin \frac{1}{\sqrt{-x}} + \frac{1}{2} \cos \frac{1}{\sqrt{-x}} \end{aligned}$$

b) Vi bruker definisjonen av derivert: For $x > 0$ har vi

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{3/2} \sin \frac{1}{\sqrt{x}} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} x^{1/2} \sin \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

For $x < 0$ har vi tilsvarende

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(-x)^{3/2}\sin\frac{1}{\sqrt{-x}} - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} -(-x)^{1/2}\sin\frac{1}{\sqrt{-x}} = 0.$$

Til sammen viser disse to ensidige grensene at $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$, og dermed er f er deriverbar i 0 med $f'(0) = 0$.

c) **Metode 1:** Bruker vi middelverdisetningen på intervallet med endepunkter x og a, får vi

$$\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(c)$$

for en c mellom x og a. Når x går mot a, går c også mot a, og dermed er

$$g'(a) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} g'(c) = b.$$

Følgelig er g deriverbar i a med $g'(a) = b$.

Metode 2: Vi regner ut $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ ved hjelp av L'Hôpitals regel (siden g er deriverbar for $x \neq a$ og kontinuerlig også i a, er alle betingelser oppfylt):

$$g'(a) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{1} = b.$$

Følgelig er g deriverbar i a med $g'(a) = b$.

Slutt