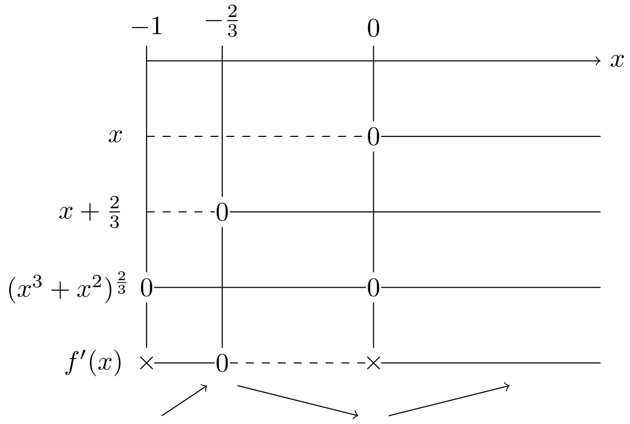
Oblig 2 i MAT1100 H21: Løsningsforslag

Oppgave 1. a) Tredjerøtter har samme fortegn som det som står under rottegnet, så det holder å finne fortegnet til $x^3 + x^2$. Faktoriserer vi, ser vi at $x^3 + x^2 = x^2(x + 1)$. Begge faktorene er positive på definisjonsmengden $D_f = [-1, \infty)$, bortsett fra i punktene $x = -1$ og $x = 0$ der én av faktorene (og dermed produktet) er 0. Funksjonen er altså positiv i hele definisjonsområdet bortsett fra i nullpunktene $x = -1$ og $x = 0$. (Det er helt greit å svare at funksjonen er positiv i hele definisjonsmengden – det avhenger av om man mener "positiv" i streng eller litt mindre streng betydning.)

For å finne maksimums- og minimumspunkter deriverer vi f:

$$f'(x) = \left(\left(x^3 + x^2\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\left(x^3 + x^2\right)^{-\frac{2}{3}}(3x^2 + 2x) = \frac{x(x + \frac{2}{3})}{(x^3 + x^2)^{\frac{2}{3}}}$$

Fortegnsskjemaet nedenfor viser hvor funksjonen vokser og avtar. Vi ser at -1 og 0 er lokale minimumspunkter, mens $-\frac{2}{3}$ er et lokalt maksimumspunkt.



b) Vi følger prosedyren for å finne skråasymptoter fra seksjon 6.5 i *Kalkulus*. Første skritt er å finne stigningstallet a til asymptoten:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(x^3 + x^2\right)^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = 1$$

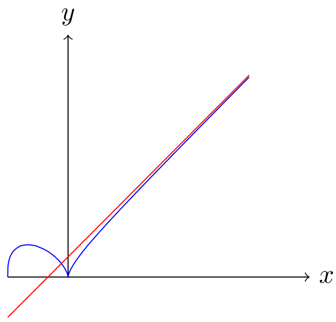
Dette betyr at hvis vi har en asymptote, så er stigningstallet $a = 1$. Neste skritt er å finne konstantleddet b:

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} \left(\left(x^3 + x^2\right)^{\frac{1}{3}} - x\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} - 1}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$$

Dermed er asymptoten $y = ax + b = x + \frac{1}{3}$.

Figuren nedenfor viser et plott av funksjonen i blått og asymptoten i rødt over intervallet $[-1, 4]$. Vi ser hvordan informasjonen vi har funnet, gjenspeiles i figuren: Funksjonen er positiv, har minimumspunkter i $x = -1$ og $x = 0$, og et (lokalt) maksimum i $x = -\frac{2}{3}$. Kurven er "uendelig bratt" i $x = -1$ og $x = 0$, og linjen $y = x + \frac{1}{3}$ er en asymptote når $x \to \infty$.



c) For å finne den annenderiverte kan det lønne seg å skrive den førstederiverte på formen $f'(x) = \frac{x^2+\frac{2}{3}x}{(x^3+x^2)^{\frac{2}{3}}}$. Da får vi:

$$f''(x) = \frac{\left(2x+\frac{2}{3}\right)\left(x^3+x^2\right)^{\frac{2}{3}} - \left(x^2+\frac{2}{3}x\right)\cdot\frac{2}{3}\left(x^3+x^2\right)^{-\frac{1}{3}}\left(3x^2+2x\right)}{\left(x^3+x^2\right)^{\frac{4}{3}}}$$

$$= \frac{\left(2x+\frac{2}{3}\right)\left(x^3+x^2\right) - 2\left(x^2+\frac{2}{3}x\right)^2}{\left(x^3+x^2\right)^{\frac{5}{3}}}$$

$$= \frac{2x^4+2x^3+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2-2x^4-\frac{8}{3}x^3-\frac{8}{9}x^2}{\left(x^3+x^2\right)^{\frac{5}{3}}} = -\frac{2x^2}{9\left(x^3+x^2\right)^{\frac{5}{3}}}$$

Vi ser at $f''(x)$ er negativ, bortsett fra i punktene $x = 0$ og $x = -1$ der den dobbeltderiverte ikke eksisterer. Det betyr at f er konkav på hvert av intervallene $[-1, 0]$ og $[0, \infty)$. Legg imidlertid merke til at f *ikke* er konkav på hele $[-1, \infty)$: Trekker vi en linje mellom to punkter på grafen, ett med x-verdi litt mindre enn 0 og ett med x-verdi litt større enn 0, vil sekanten ligge over grafen istedenfor under.

Oppgave 2. a) For at f skal være kontinuerlig i 0, må $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Vi regner derfor ut grenseverdien:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2x} \overset{L'H}{=} -\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2} = -\frac{1}{2}$$

Vi må altså velge $a = -\frac{1}{2}$ for at funksjonen skal være kontinuerlig.

b) For å sjekke om f er deriverbar i 0, bruker vi definisjonen av derivert:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(\cos x)}{x^2} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)+\frac{x^2}{2}}{x^3}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)+x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\tan x + x}{3x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{\cos x^2}+1}{6x}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\cos^3 x}\cdot(-\sin x)}{6} = 0$$

Dette viser at f er deriverbar i 0 med $f'(0) = 0$.

c) Observer at siden $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, så er $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\ln(\cos x) = -\infty$. Dermed har vi:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(x-\frac{\pi}{2})f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{(x-\frac{\pi}{2})\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{x^2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\Big((x-\frac{\pi}{2})\ln(\cos x)\Big)$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\Big((x-\frac{\pi}{2})\ln(\cos x)\Big) = \frac{4}{\pi^2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln(\cos x)}{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}} \overset{L'H}{=} \frac{4}{\pi^2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{-\frac{1}{(x-\frac{\pi}{2})^2}}$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\sin x\right)\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{\cos x}\right) \overset{L'H}{=} \frac{4}{\pi^2}\cdot 1\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{2(x-\frac{\pi}{2})}{\sin x} = 0$$

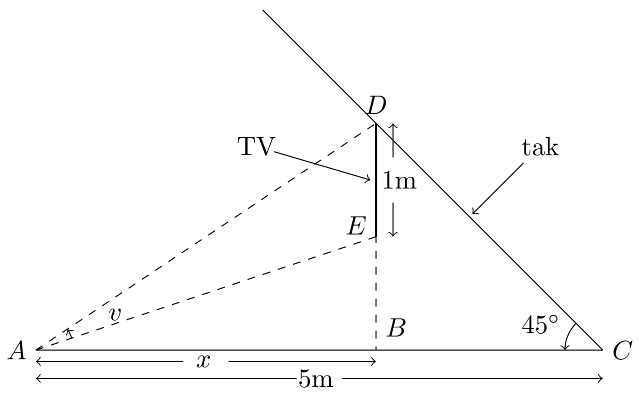
Oppgave 3. a) Vi bruker kjerneregelen og rydder litt opp etterpå:

$$f_a'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{a-x}{x}\right)^2}\cdot\frac{(-1)\cdot x-(a-x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{a-x}{x}\right)^2}\cdot\frac{-a}{x^2}$$

$$= -\frac{a}{x^2+(a-x)^2} = -\frac{a}{2x^2-2ax+a^2}$$

b) Jeg har satt på noen ekstra punkter på figuren. Knepet er å utnytte at $v = \angle BAD - \angle BAE$. Siden $|BD| = |BC| = 5-x$, ser vi at $\tan(\angle BAD) = \frac{5-x}{x}$, dvs. $\angle BAD = \arctan\frac{5-x}{x}$. Siden $|BE| = |BD| - 1 = (5-x)-1 = 4-x$, får vi på tilsvarende måte at $\angle BAE = \arctan\frac{4-x}{x}$. Dermed er

$$v = \angle BAD - \angle BAE = \arctan\frac{5-x}{x} - \arctan\frac{4-x}{x} = f_5(x) - f_4(x).$$



c) Vi deriverer uttrykket for v med hensyn på x:

$$v' = f_5'(x) - f_4'(x) = -\frac{5}{2x^2-2\cdot 5\cdot x+5^2} + \frac{4}{2x^2-2\cdot 4\cdot x+4^2}$$

$$= -\frac{5}{2x^2-10x+25} + \frac{4}{2x^2-8x+16} = -\frac{-2x^2+20}{(2x^2-10x+25)(2x^2-8x+16}$$

Vi ser at $f'(x) = 0$ når $x = \sqrt{10}$. Det er lette å sjekke at dette er et maksimumspunkt, og følgelig er $x = \sqrt{10}\,\mathrm{m} \approx 3.16\,\mathrm{m}$ den optimale avstanden.