Eksamen MAT 1100 30. november 2022

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) Teksten sier at antall nye unge insekter neste år er 2 multiplisert med x_n pluss 4 multiplisert med y_n. Siden ingen av de unge insektene fortsatt er unge neste uke, blir da

$$x_{n+1} = 2x_n + 4y_n$$

Halvparten av de unge, altså $\frac{1}{2}x_n$, overlever til neste uke. De er da gamle. Siden alle gamle dør, blir

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}x_n$$

Altså

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}}$$

b)

$$A^2 = \begin{array}{cc|cc} & & 2 & 4 \\ & & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline 2 & 4 & 6 & 8 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 2 \end{array} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{array}{cc|cc} & & 6 & 8 \\ & & 1 & 2 \\ \hline 6 & 8 & 44 & 64 \\ 1 & 2 & 8 & 12 \end{array} = \begin{pmatrix} 44 & 64 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Siden $\begin{pmatrix} x_{n+4} \\ y_{n+4} \end{pmatrix} = A^4 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, har vi $B = A^4 = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 44 & 64 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}}}$

c) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0$, så A er inverterbar.

Matrisen $(A^{-1})^n$ er da en invers av matrisen A^n, fordi matrisemultiplikasjon er assosiativt:

$$(A^{-1})^2 \cdot A^2 = A^{-1} \cdot \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot A = A^{-1} \cdot A = I \quad \text{osv.}$$

(Bruker her egentlig induksjon.)

Oppgave 2

a) $\int \ln(x^7)\,dx = \int 7\ln x\,dx = 7\cdot\int (\ln x)\cdot 1\,dx$

$= 7\left[x\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx\right] = 7x\ln x - 7\cdot\int 1\,dx$

$= \underline{\underline{7x\ln x - 7x + C}}$

Delvis: $F(x) = \ln x$, $G'(x) = 1$, $F'(x) = \frac{1}{x}$, $G(x) = x$

b) $\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$ gir

$1 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$

$x=0$ gir $1 = B$

$x=-1$ gir $1 = C\cdot(-1)^2$, dvs. $C = 1$

Sammenlikning av x^2-ledd gir da $0 = A + C$, dvs. $A = -1$. Så

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$$

Dermed:

$$\int \frac{1}{x^2(x+1)}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \underline{\underline{-\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x+1| + C}}$$

Oppgave 3

a) Vi har $\frac{\pi}{(x+1)^2} < \frac{\pi}{x^2}$, og $\int_1^\infty \frac{\pi}{x^2}\,dx = \pi\cdot\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

Her er $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ et konvergent p-integral $(p=2)$

Konvergens følger ved sammenlikningstesten for uegentlige integraler.

[Alternativt: Kan regne ut at $\int_1^\infty \frac{\pi}{(x+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$ direkte.]

b) Hvis $f(x) = \frac{1}{x+1}$, så er

$$\int_1^\infty \frac{\pi}{(x+1)^2}\,dx = \int_1^\infty \pi\cdot[f(x)]^2\,dx = \lim_{b\to\infty} \boxed{\int_1^b \pi\cdot[f(x)]^2\,dx}$$

Vi vet at integralet $\boxed{}$ er volumet av rotasjonslegemet som fremkommer når grafen til $f(x)$ på intervallet $[1, b]$ roteres om x-aksen.

Tolkningen av resultatet fra a) er derfor at når $b\to\infty$, vil dette volumet nærme seg en endelig verdi.

Oppgave 4

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sin\frac{1}{x} \cdot \sin x & \text{for } x \neq 0 \\ 1 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

a) $$\lim_{x\to 0} \left(1 + \sin\frac{1}{x} \cdot \overbrace{\sin x}^{0}\right) = 1 = f(0)$$

Ligger i intervallet $[-1, 1]$

Så $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, dvs. f er kontinuerlig i 0.

b) $$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{1} + \sin\frac{1}{h} \cdot \sin h - \cancel{1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \sin\frac{1}{h} \cdot \frac{\sin h}{h}$$

Går mot 1 når $h \to 0$

Svinger mellom +1 og −1 når $h \to 0$

Det følger at uttrykket $\left(\sin\frac{1}{h}\right) \cdot \left(\frac{\sin h}{h}\right)$ i vilkårlig små intervaller om 0 vil ha verdier vilkårlig nær både +1 og −1. Alltså eksisterer ikke $f'(0)$, dvs. f er ikke deriverbar i 0.

Oppgave 5

$$g(x,y) = y \cdot f(x,y)$$

a) $$\lim_{h\to 0} \frac{g(h,0) - g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 \cdot f(h) - 0 \cdot f(0)}{h} = 0$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(0,h) - g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h} \cdot f(h) - 0 \cdot \cancel{f(0)}}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(h) = f(0) = 1$$

Fordi f er kontinuerlig

Grensene vi fant her, er henholdsvis $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ og $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$.

Altså

$$\nabla g(0,0) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(0,0), \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\right) = (0, 1)$$

b) Siden g er deriverbar i $(0,0)$, har vi

$$g'(\vec{a};\vec{r}) = \nabla g(0,0)\cdot\vec{r} = (0,1)\cdot(1,1) = \underline{\underline{1}}$$

c) $$\lim_{\vec{r}\to\vec{0}} \frac{[g(\vec{0}+\vec{r})-g(\vec{0})] - \nabla g(\vec{0})\cdot\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$\vec{r}=(s,t)$

$|\vec{r}|=\sqrt{s^2+t^2}$

$$= \lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{[g(s,t)-g(0,0)] - (0,1)\cdot(s,t)}{\sqrt{s^2+t^2}}$$

$$= \lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{[t\cdot f(s+t) - 0] - t}{\sqrt{s^2+t^2}}$$

$$= \lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{t\cdot f(s+t) - t}{\sqrt{s^2+t^2}}$$

$$= \lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{t}{\sqrt{s^2+t^2}}\cdot[f(s+t)-1] \qquad (*)$$

Her går faktoren $[f(s+t)-1]$ mot 0, fordi $f(0)=1$ og f er kontinuerlig i 0. Videre er

$$\left|\frac{t}{\sqrt{s^2+t^2}}\right| \leq \frac{|t|}{\sqrt{t^2}} = \frac{|t|}{|t|} = 1$$

Altså blir grensen $(*)$ lik 0. Så <u>g er deriverbar i $(0,0)$</u>

God jul!