Løsningsforslag utsatt eksamen MAT 1100
Torsdag 19. januar 2023

Oppgave 1

a) $\vec{F}(x,y) = (x\cos y,\ x\sin y)$

$$\vec{F}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{pmatrix}}}$$

b) $$g(x,y) = \begin{vmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{vmatrix} = x\cos^2 y + x\sin^2 y$$

$$= x(\cos^2 y + \sin^2 y) = x \cdot 1 = x$$

Så $\nabla g(x,y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) = (1,0)$

Altså $\underline{\underline{\nabla g(0,0) = (1,0)}}$

Oppgave 2

a) $x^2 : (x^2+1) = 1 - \frac{1}{x^2+1}$

$\underline{x^2 + 1}$

-1

Så: $$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int 1\,dx - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \underline{\underline{x - \arctan x + C}}$$

b) $$\int x \arctan x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

Delvis $F(x) = \arctan x$ $G'(x) = x$
$F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $G(x) = \frac{1}{2}x^2$

$$\overset{a)}{=} \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C}}$$

c) $$V = 2\pi \int_0^1 x \arctan x\,dx$$

$$\overset{b)}{=} 2\pi \left[\frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x\right]_0^1$$

$$= 2\pi \left[\left(\frac{1}{2}\arctan 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\arctan 1\right) - 0\right]$$

$$= 2\pi \arctan 1 - \pi = 2\pi \cdot \frac{\pi}{4} - \pi = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{2} - \pi}}$$

Oppgave 3

a) Teksten sier at antall unge i uke $n+1$ er $1000 \cdot y_n$, så

$$x_{n+1} = 1000\, y_n$$

Videre sier teksten at antall voksne i uke $n+1$ er $5\,\%$ av x_n, altså $0.05\, x_n$. Så

$$y_{n+1} = 0.05\, x_n$$

Altså

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0\, x_n + 1000\, y_n \\ y_{n+1} = 0.05\, x_n + 0\, y_n \end{cases} \quad \text{dvs.} \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1000 \\ 0.05 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Dermed

$$\underline{\underline{A = \begin{pmatrix} 0 & 1000 \\ 0.05 & 0 \end{pmatrix}}}$$

b)

$$A^2 = \begin{array}{cc|cc} & & 0 & 1000 \\ & & 0.05 & 0 \\ \hline 0 & 1000 & 50 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0 & 50 \end{array} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix}}}$$

Vi har $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1000 \\ 0.05 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 50 = -50 \neq 0$,

så $\underline{\underline{\text{A er inverterbar.}}}$

c) Vi har at

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{array}{cc|cc} & & 50 & 0 \\ & & 0 & 50 \\ \hline 50 & 0 & 50^2 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 50^2 \end{array} = \begin{pmatrix} 50^2 & 0 \\ 0 & 50^2 \end{pmatrix}$$

Slik fortsetter mønsteret. Vi får $A^6 = A^4 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 50^3 & 0 \\ 0 & 50^3 \end{pmatrix}$ osv.

Fordi $A^2 = 50 \cdot I$ der I er identitetsmatrisen, blir

$$A^{2n} = (A^2)^n = (50 \cdot I)^n = 50^n \cdot I^n = 50^n \cdot I$$

$$= 50^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50^n & 0 \\ 0 & 50^n \end{pmatrix} \quad \text{for } n \geq 1.$$

Altså

$$\underline{\underline{A^n = \begin{pmatrix} 50^{n/2} & 0 \\ 0 & 50^{n/2} \end{pmatrix}}} \quad \text{for alle partall } n \geq 2$$

Oppgave 4

$f(x) = x^3 - x + 1 - e^{x^2 - x}$ gir

$f(0) = 0 - 0 + 1 - e^0 = 1 - 1 = 0$

$f(1) = 1 - 1 + 1 - e^{1-1} = 1 - e^0 = 0$

Vi vet at f er kontinuerlig og deriverbar på $[0, 1]$, og Rolles teorem gir da at det fins $c \in (0, 1)$ slik at

$$f'(c) = 0.$$

Velg $x = c$. [Kommentar: Kan alternativt bruke middelverdisetningen]

Oppgave 5

$$f(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2}\, dt$$

a) La $u(x) = x^2$ og $g(x) = \int_0^x e^{t^2}\, dt$. Da er

$$f(x) = g(u(x))$$

og

$$g'(x) = e^{x^2} \text{ ved fundamentalteoremet.}$$

Kjerneregelen gir da

$$f'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x)$$
$$= e^{(x^2)^2} \cdot 2x = \underline{\underline{2x e^{x^4}}}$$

b) Merk at

$$f(-x) = \int_0^{(-x)^2} e^{t^2}\, dt = \int_0^{x^2} e^{t^2}\, dt = f(x)$$

Altså er

$$F(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\, dt = 2 \cdot \int_0^x f(t)\, dt$$

Fundamentalteoremet gir da

$$F'(x) = 2 \cdot f(x)$$

Derivasjon på begge sider gir

$$F''(x) = 2 \cdot f'(x)$$

Fra a) vet vi at $f'(x) = 4x e^{x^4}$. Altså

$$F''(1) = 2 \cdot f'(1) = 4 \cdot 1 \cdot e^1 = \underline{\underline{4e}}$$

Oppgave 6

Siden f er kontinuerlig i 0, har vi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \qquad (*)$$

Anta at

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) > 0$$

Da er

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(-f(-x)\right)$$

$$= -\lim_{x\to 0^-} f(-x)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u=-x \\ x\to 0^- \text{ gir } u\to 0^+ \end{array}}$$

$$= -\lim_{u\to 0^+} f(u) = -\lim_{x\to 0^+} f(x) < 0$$

Dette er umulig pga $(*)$, så $\lim_{x\to 0^+} f(x) > 0$ er også umulig.

På tilsvarende måte kan vi vise at $\lim_{x\to 0^+} f(x) < 0$ er umulig.

Alltså $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Likning $(*)$ gir nå at $f(0) = 0$.

Slutt