UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1100 — Kalkulus
Eksamensdag:	Onsdag 30. november 2022
Tid for eksamen:	15.00 – 19.00
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen inneholder 12 deloppgaver som teller 6 poeng hver. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1. I denne oppgaven skal vi bruke en (2×2)-matrise til å modellere utviklingen til en populasjon av insekter. Vi regner tiden i uker, og vi deler insektene i kategoriene *unge* og *gamle*. Antall unge insekter i uke n skriver vi x_n, og antall gamle insekter i uke n skriver vi y_n. Når det gjelder utviklingen fra en uke til den neste, antar vi at hvert ungt insekt gir opphav til to unge insekter neste uke, og at hvert gammelt insekt gir opphav til fire unge neste uke. Halvparten av de unge insektene overlever til neste uke, og er da gamle. Alle de gamle dør.

a) Forklar kort hvorfor $x_{n+1} = 2x_n + 4y_n$ og $y_{n+1} = \frac{1}{2}x_n$, og bruk dette til å finne (2×2)-matrisen A slik at

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \text{for } n \geq 0.$$

b) Finn en matrise B slik at

$$\begin{pmatrix} x_{n+4} \\ y_{n+4} \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \text{for } n \geq 0.$$

c) Begrunn at matrisen A^n er inverterbar for alle naturlige tall n.

Oppgave 2. Finn de ubestemte integralene

a) $\displaystyle\int \ln(x^7)\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x+1)}\, dx$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3.

a) Vis at det uegentlige integralet

$$\int_1^\infty \frac{\pi}{(x+1)^2}\,dx$$

konvergerer.

b) Resultatet fra a) kan tolkes geometrisk i forbindelse med rotasjon av en funksjonsgraf om x-aksen. Beskriv en slik tolkning.

Oppgave 4. La $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være funksjonen gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sin\dfrac{1}{x} \cdot \sin x & \text{for } x \neq 0 \\ 1 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

a) Vis at f er kontinuerlig i $x = 0$.

b) Vis at f ikke er deriverbar i $x = 0$.

Oppgave 5. La $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være en kontinuerlig funksjon som oppfyller $f(0) = 1$. Definer funksjonen $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ ved

$$g(x, y) = y \cdot f(x + y)$$

a) Finn grensene

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h,0) - g(0,0)}{h} \quad \text{og} \quad \lim_{h\to 0} \frac{g(0,h) - g(0,0)}{h}$$

og bruk dette til å vise at $\nabla g(0,0) = (0,1)$.

b) Anta at g er deriverbar i punktet $\mathbf{a} = (0,0)$. Finn den retningsderiverte $g'(\mathbf{a}; \mathbf{r})$, der $\mathbf{a} = (0,0)$ og $\mathbf{r} = (1,1)$.

c) Vis at g er deriverbar i punktet $\mathbf{a} = (0,0)$.

SLUTT