UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1100 — Kalkulus
Eksamensdag:	Mandag 10. oktober 2022
Tid for eksamen:	15.00 – 17.00
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen består av 18 oppgaver. Alle oppgavene teller like mye. Det er bare ett riktig alternativ på hver oppgave. Om du svarer galt eller lar være å svare på en oppgave, får du 0 poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Velger du mer enn ett alternativ på en oppgave, får du 0 poeng.

Oppgave 1. Hvilket komplekst tall z oppfyller $z^3 = -64$?

A) $z = 3e^{i(\pi/4)}$
B) $z = 4e^{i(\pi/3)}$
C) $z = 8i$
D) $z = -8i$
E) Det finnes ingen komplekse tall som oppfyller dette

Oppgave 2. Det komplekse tallet $z = 1 - i$ kan skrives

A) $z = \sqrt{2}e^{i(\pi/4)}$
B) $z = \sqrt{2}e^{i(5\pi/4)}$
C) $z = \sqrt{2}e^{i(7\pi/4)}$
D) $z = e^{-i(\pi/2)}$
E) $z = 2e^{-i(\pi/2)}$

Oppgave 3. Hvilket utsagn er sant:

A) Alle komplekse polynomer har minst ett reelt nullpunkt
B) Alle komplekse tall har en reell kvadratrot
C) Alle reelle polynomer kan skrives som en sum av komplekse førstegrads-polynomer
D) Alle komplekse polynomer kan skrives som et produkt av reelle førstegradspolynomer
E) Alle reelle polynomer av grad større enn 0 har minst ett nullpunkt i mengden $\mathbf{C}$ av komplekse tall

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 4. Hvilken andregradslikning har både $z = i$ og $z = 1 - i$ som løsning?

A) $z^2 + i(1 - i) = 0$
B) $z^2 - z + 1 + i = 0$
C) $z^2 + z + i = 0$
D) $z^2 - (5 + 4i)z + (-3 + 5i) = 0$
E) $z^2 + (5 + 4i)z - (-3 + 5i) = 0$

Oppgave 5. De komplekse tredjerøttene w til $z = -i$ er:

A) $w = e^{i(\pi/3)}$, $w = e^{i(2\pi/3)}$ og $w = -i$
B) $w = i$, $w = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ og $w = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
C) $w = i$, $w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ og $w = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
D) $w = i$, $w = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ og $w = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
E) $w = -i$, $w = i$ og $w = -1$

Oppgave 6. Mengden av alle komplekse tall z i det komplekse planet som oppfyller betingensen $|z - 1 - i| = 2$ er:

A) Et trekantet område med sidelengder 1, 1 og 2
B) En rett linje som ligger i avstand 2 fra punktet $1 + i$
C) En rett linje som ligger i avstand 2 fra punktet $1 - i$
D) En sirkel med sentrum i punktet $1 + i$
E) En sirkel med sentrum i punktet $1 - i$

Oppgave 7. Grensen $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-3)^n + e^n}{4^n - 5n}$ er:

A) $-\frac{3}{4}$
B) 0
C) 1
D) $+\infty$
E) $-\infty$

Oppgave 8. Hvilket utsagn er sant?

A) En nedad begrenset følge kan kun konvergere hvis den er avtakende.
B) Hvis A er en delmengde av $\mathbf{R}$ slik at både $\sup A$ og $\inf A$ fins, så er $\sup A > \inf A$.
C) Hvis en følge er avtakende og nedad begrenset, så konvergerer den.
D) La $A \subseteq \mathbf{R}$ være mengden av rasjonale tall i intervallet $(0, 1)$. Da eksisterer ikke $\sup A$.
E) La $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en følge, og la følgen $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ være gitt ved at $b_n = a_n^2$. Hvis følgen $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerer, så konvergerer også følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 9. Grensen $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin 2x}$ er:

A) 0
B) 1/2
C) $+\infty$
D) $\frac{1}{4}$
E) $-\infty$

Oppgave 10. Den deriverte av funksjonen $f(x) = \arctan(\arctan x)$ er:

A) $f'(x) = \frac{1}{1+(\arctan x)^2} \cdot \frac{1}{1+x^2}$
B) $f'(x) = \frac{1}{1+(\arctan x)^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x$
C) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot \arctan x$
D) $f'(x) = \frac{1}{1+(\arctan x)^2} \cdot 2x$
E) $f'(x) = -\arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \cdot \frac{1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x$

Oppgave 11. La $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være definert ved $F(x) = \int_0^{x^2} \sin(1+t^4)dt$. Da har vi:

A) $F'(x) = 2x\cos(1+x^8)$
B) $F'(x) = 2x\cos(1+x^2)$
C) $F'(x) = 2x\sin(1+x^8)$
D) $F'(x) = x^2\sin(1+x^4)$
E) $F'(x) = \sin(1+x^4)$

Oppgave 12. Volumet som fremkommer når området begrenset av grafen til $f(x) = 1/x$ og x-aksen over intervallet $[1, 2]$ dreies om y-aksen, er

A) 4
B) π
C) 2π
D) 4π
E) π^2

Oppgave 13. $\lim_{x\to 0^+} x^{\arctan x}$ er:

A) 0
B) 1
C) -1
D) $+\infty$
E) $-\infty$

Oppgave 14. Hvilken likning beskriver en skråasymptote for funksjonen f definert ved $f(x) = 8xe^{-(1/x)}$ for $x > 0$?

A) $y = x$
B) $y = 8x$
C) $y = x - 8$
D) $y = 8x - 1$
E) $y = 8x - 8$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 15. Hvilken funksjon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ er strengt konveks, men *ikke* strengt voksende?

A) $f(x) = e^{-x}$
B) $f(x) = \arctan x$
C) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$
D) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$
E) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Oppgave 16. La R være Riemannsummen for $f(x) = x^2$ knyttet til partisjonen $\Pi = \{0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\}$ av intervallet $[0, 1]$ og utvalget U bestående av de høyre endepunktene i delintervallene, altså $U = \{\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\}$. Hva er verdien til R?

A) 1/3
B) 8/25
C) 7/22
D) 11/25
E) 1

Oppgave 17. La $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ være gitt ved $f(x) = \arcsin \dfrac{1}{1+x}$. Hvilket utsagn er sant:

A) f har ingen omvendt funksjon
B) f har en omvendt funksjon med definisjonsområde $[0, \frac{\pi}{2})$
C) f har en omvendt funksjon med definisjonsområde $(0, \frac{\pi}{2}]$
D) f har en omvendt funksjon med definisjonsområde $(0, 1)$
E) f har en omvendt funksjon med verdimengde $(0, \frac{\pi}{2})$

Oppgave 18. La $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være gitt ved $f(x) = 5x + 8$, og la $\epsilon > 0$ være gitt. Hvilken δ er slik at $|x - 4| < \delta$ medfører $|f(x) - f(4)| < \epsilon$?

A) $\delta = \epsilon/5$
B) $\delta = 1/5$
C) $\delta = 1/8$
D) $\delta = \frac{1}{5} \cdot f(4)$
E) $\delta = 5/\epsilon$

SLUTT