UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1100 — Kalkulus
Eksamensdag:	Lørdag 19. november 2022 (prøveeksamen)
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00 [Gjennomgang Sophus Lie kl. 15]
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling (ikke med på prøveeksamen)
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen inneholder 12 deloppgaver som teller 6 poeng hver. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1.

a) Finn integralet $\displaystyle\int \frac{1}{(2+x)^2(2-x)^2}\,dx$

b) Finn volumet av omdreiningslegemet som fremkommer når grafen til $f(x) = 1/(4-x^2)$ på intervallet $[0,1]$ roteres om x-aksen.

Oppgave 2. UiOs nye kurs *Søvndyssende matematikk* har 200 studenter. Foreleseren har kommet fram til følgende modell:

(1) 90 prosent av de som er holder seg våkne på forelesningen i dag, sovner på forelesningen neste forelesningsdag.

(2) 50 prosent av de som sovner på forelesningen i dag, holder seg våkne på forelesningen neste forelesningsdag. Resten sovner da også.

La y_n være antall studenter som holder seg våkne på forelesningen på forelesningsdag n, og la z_n være antall som sovner.

a) Finn en matrise M slik at vi for alle $n \geq 1$ har $\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

b) Anta at alle 200 studenter holder seg våkne første forelesning (dag 1). Finn tilstandsvektoren

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

på dag $n = 3$.

c) Finn matrisen M^2. Er matrisen M inverterbar? Begrunn svaret.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. La $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ være funksjonen gitt ved

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + 9y^2}$$

a) Finn de partielle deriverte av f og gradienten ∇f.

b) I hvilken retning avtar funksjonverdien til f raskest ut fra punktet $(1, 1)$? Finn $f'((1, 1); (1, 1))$.

Oppgave 4. La $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ være funksjonen gitt ved

$$f(x, y) = x + y^2$$

a) Bruk definisjonen av partielle deriverte til å vise at $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$.

b) Bruk definisjonen av deriverbarhet til å vise at f er deriverbar i $(0, 0)$.

Oppgave 5. La $f : [-1, \infty) \to \mathbf{R}$ være gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} \arccos x & \text{for } x \in [-1, 0] \\ \arctan(x^{-1}) & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

a) Vis at f er deriverbar i 0, og finn $f'(0)$.

b) Finn eventuelle ekstremalpunkter for f, og skisser grafen til f.

c) Avgjør om det uegentlige integralet $\int_1^\infty f(x)\, dx$ konvergerer.

LYKKE TIL, OG GOD JUL!