

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1100 — Kalkulus (prøveeksamen midtveis)

Eksamensdag: Lørdag 1. oktober 2022

Tid for eksamen: 09.00 – 18.00

Oppgavesettet er på 4 sider.

Vedlegg: Formelsamling

Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen består av 18 oppgaver. Alle oppgavene teller like mye. Det er bare ett riktig alternativ på hver oppgave. Om du svarer galt eller lar være å svare på en oppgave, får du 0 poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Velger du mer enn ett alternativ på en oppgave, får du 0 poeng.

Oppgave 1. Det komplekse tallet $z = -2 - 2\sqrt{3}i$ kan skrives:

- A) $z = \sqrt{8}e^{i(3\pi/2)}$
- B) $z = 4e^{i(4\pi/3)}$
- C) $z = 2 + 3i$
- D) $z = 4e^{i(2\pi/3)}$
- E) $z = \sqrt{8}e^{i(3\pi/4)}$

Oppgave 2. Hvilken x er en løsning av likningen $e^{ix} + i = 0$:

- A) $x = i$
- B) $x = \pi$
- C) $x = 1$
- D) $x = \pi/2$
- E) $x = -\pi/2$

Oppgave 3. En drone flyr i konstant høyde 60 meter rett sørover fra senderen med hastigheten 5 meter per sekund. Hvor fort øker avstanden i luftlinje fra senderen til dronen når dronen befinner seg 80 meter sør for senderen?

- A) 1 m/s
- B) 2 m/s
- C) 3 m/s
- D) 4 m/s
- E) 4,5 m/s

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 4. Mengden $\{z : |z - 2| > 3\}$ i det komplekse planet er:

- A) Mengden av komplekse tall z som ligger utenfor sirkelen med sentrum 2 og radius 3
- B) Mengden av komplekse tall z som ligger innenfor sirkelen med sentrum 2 og radius 3
- C) Mengden av komplekse tall z som ligger nærmere 2 enn 3
- D) Mengden av komplekse tall z som har realdel større enn 3
- E) Mengden av komplekse tall z som er slik at realdelen til $z-1$ er større enn 3

Oppgave 5. Hvilket komplekstall w er en sjetterot til $z = -64$:

- A) $w = 4e^{i(\pi/3)}$
- B) $w = e^{i(\pi/6)}$
- C) $w = 2$
- D) $w = 2e^{i(\pi/6)}$
- E) $w = 2e^{-i(\pi/3)}$

Oppgave 6. La $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ være en funksjon som er to ganger deriverbar. Hvilket utsagn er sant:

- A) Hvis f er konveks, så er den strengt voksende
- B) Hvis det finnes et punkt $t \in [a, b]$ slik at $f'(t) = 0$, så er ikke f konveks
- C) Hvis $f''(x) \leq 0$ for alle x , så er f konkav
- D) Hvis $f''(x) \leq 0$ for alle x , så er f konveks
- E) Hvis t er slik at $f''(t) = 0$, så er t et vendepunkt for f

Oppgave 7. Den deriverte til $f(x) = \arctan(e^{2x}) + e^{2\arctan x}$ er gitt ved:

- A) $f'(x) = \frac{2e^{2x}}{1 + e^{4x}} - \frac{2e^{2\arctan x}}{1 + x^2}$
- B) $f'(x) = \frac{1}{1 + e^{4x}} - \frac{2e^{2\arctan x}}{1 + x^2}$
- C) $f'(x) = \frac{2e^{2x}}{1 + e^{4x}} + \frac{2e^{2\arctan x}}{1 + x^2}$
- D) $f'(x) = \frac{1}{1 + e^{4x}} + \frac{2e^{2\arctan x}}{1 + (2x)^2}$
- E) $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(e^{2x})} + \frac{2e^{2\arctan x}}{\sqrt{1 + x^2}}$

Oppgave 8. Det komplekse tallet $z = 2e^{-i(\pi/4)}$ kan skrives:

- A) $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$
- B) $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
- C) $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
- D) $z = 2 - 2i$
- E) $z = -2 + 2i$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 9. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (4x)^{2 \sin x}$ er lik:

- A) 1
- B) 2
- C) $+\infty$
- D) 0
- E) $-\infty$

Oppgave 10. La $G : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ være definert ved

$$G(x) = \int_1^{\sqrt{x+1}} \ln t \, dt$$

Da er $G'(1)$ lik:

- A) $\frac{\ln 2}{2\sqrt{2}}$
- B) $\frac{\ln 2}{4\sqrt{2}}$
- C) $\frac{\ln 2}{2}$
- D) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$
- E) 0

Oppgave 11. La $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ være følgen gitt ved $a_n = (-1)^n + \frac{n^2 + 8n + 9}{n^3 + 7n}$.
Hvilket utsagn er sant?

- A) Følgen konvergerer mot $(-1)^n$
- B) Følgen konvergerer mot -1
- C) Følgen konvergerer mot 0
- D) Følgen konvergerer mot 1
- E) Følgen divergerer

Oppgave 12. Volumet av omdreiningslegemet som fremkommer når området under grafen til $f(x) = \sqrt{x^7 + 14}$ på intervallet $[0, 1]$ dreies om x -aksen, er:

- A) $\sqrt{5}$
- B) $\frac{117}{8}$
- C) 15π
- D) $\frac{113\pi}{8}$
- E) $\frac{15\pi}{8}$

Oppgave 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{2x^3 + x^4}$ er lik:

- A) 0
- B) $1/2$
- C) 1

(Fortsettes på side 4.)

- D) 2
- E) ∞

Oppgave 14. La g være den omvendte funksjonen til $f : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbf{R}$ gitt ved $f(x) = \sin^3 x + 1$. Definisjonsområdet D_g til g er da:

- A) $D_g = (-1, 1)$
- B) $D_g = [-2, 0]$
- C) $D_g = [0, 2]$
- D) $D_g = [-(2^{1/3}), 0]$
- E) $D_g = \mathbf{R}$

Oppgave 15. $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x \ln x)$ er:

- A) $+\infty$
- B) e^2
- C) e^{-2}
- D) $-\infty$
- E) 0

Oppgave 16. La $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ være gitt ved $f(x) = 1/x$. Hvilket utsagn er sant?

- A) For alle $t > 0$ fins $\delta > 0$ slik at hvis $|x - 1| = \delta$, så er $|f(x) - 1| > t$
- B) For alle $\epsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at hvis $|f(x) - f(2)| < \delta$, så er $|x - 1| < \epsilon$
- C) For alle $\epsilon > 0$ fins $t > 0$ slik at hvis $|x - 1| < t$, så er $|f(x) - 1| < \epsilon$
- D) For alle $N > 0$ fins $\delta > 0$ slik at hvis $|x - 1| < \delta$, så er $|f(x) - 1| > N$
- E) For alle $N > 0$ fins $M > 0$ slik at hvis $|x| > M$, så er $|f(x)| > N$

Oppgave 17. La $f(x) = 13xe^{-2/x}$ med $D_f = (0, \infty)$. Hvilket utsagn er sant:

- A) f har ingen asymptoter
- B) f har den horisontale asymptoten $y = 4$
- C) f har skråasymptoten $y = 13x$
- D) f har skråasymptoten $y = 13x - 26$
- E) f har den vertikale asymptoten $x = 0$

Oppgave 18. La Π være partisjonen av intervallet $[0, 1]$ gitt ved $\Pi = \{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1\}$, og la U være utvalget bestående av de venstre endepunktene i Π . Riemannsummen $R(\Pi, U)$ for funksjonen $f(x) = x^3$ har da verdien:

- A) $36/256$
- B) $28/290$
- C) $1/6$
- D) $17/128$
- E) $15/128$

SLUTT