UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1100 — Kalkulus

Eksamensdag: Torsdag 19. januar 2023

Tid for eksamen: 09.00 – 13.00

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg: Formelsamling

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen inneholder 12 deloppgaver som teller 6 poeng hver. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1. La $\mathbf{F} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ være gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$$

a) Finn Jacobimatrisen $\mathbf{F}'$ til $\mathbf{F}$.

b) La $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ være determinanten til Jacobimatrisen $\mathbf{F}'$, altså

$$g(x, y) = \det \mathbf{F}'(x, y)$$

Finn gradienten til g i punktet $(0, 0)$.

Oppgave 2.

a) Finn det ubestemte integralet

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 1} \, dx$$

b) Finn det ubestemte integralet

$$\int x \arctan x \, dx$$

c) Finn volumet av omdreiningslegemet som fremkommer når området under grafen til

$$f(x) = \arctan x$$

for $x \in [0, 1]$ dreies om y-aksen.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. I en modell for en koloni av insekter deler vi insektene i to aldersklasser: Unge og voksne. Vi regner tiden t i uker, $t = 1, 2, 3, \ldots.$ Vi antar at 5 % av insektene som er unge i en gitt uke, overlever til neste uke. Disse er da voksne. Videre antar vi at hvert insekt som er voksent i en gitt uke, produserer 1000 nye unge insekter neste uke. De voksne insektene dør alle innen neste uke, og de unge insektene gir ingen nye insekter neste uke. La x_n og y_n være henholdsvis antall unge og voksne insekter i uke $t = n$.

a) Begrunn kort at $x_{n+1} = 1000y_n$ og $y_{n+1} = 0.05x_n$, og bruk dette til å finne (2×2)-matrisen A slik at

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \text{for } n \geq 1.$$

b) Finn matrisen A^2. Begrunn at A er inverterbar.

c) La $n \geq 2$ være et partall. Finn A^n.

Oppgave 4. La $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være gitt ved

$$f(x) = x^3 - x + 1 - e^{x^2 - x}$$

Vis at det fins $x \in (0, 1)$ slik at $f'(x) = 0$.

Oppgave 5. La $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være gitt ved

$$f(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2}\, dt$$

a) Finn $f'(x)$.

b) La $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være gitt ved

$$F(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\, dt$$

Finn $F''(1)$.

Oppgave 6. Vis at hvis $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ oppfyller $f(x) = -f(-x)$ for alle $x \neq 0$ og f er kontinuerlig i $x = 0$, så er $f(0) = 0$.

SLUTT