MAT 1100
Obligatorisk oppgave 1 av 2, høsten 2022

Innleveringfrist
Torsdag 15. september kl. 14.30.

Instruksjoner
Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og skanner den, eller om du skriver løsningen direkte inn på en datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med gode begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante figurer. Du kan få bestått på en oppgave selv om du ikke har kommet frem til riktig svar. Alle de fire oppgavene må være bestått for å få den obligatoriske oppgaven godkjent.

Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

Studenter som har behov for utsettelse må ta kontakt med studieadministrasjonen senest samme dag som innleveringsfristen går ut.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:
uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

Oppgave 1

a) Skriv det komplekse tallet $z = 20 - 20i$ på formen $z = re^{i\theta}$, der $\theta \in [0, 2\pi)$.
b) La *M* være mengden av alle komplekse tall slik at $|z + 2 - 7i| \leq 4$. Tegn en figur som viser hvordan *M* ligger i det komplekse planet.
c) Finn tredjerøttene til $z = 1000i$. Skriv røttene på formen $z = a + bi$.

Oppgave 2

Betrakt det komplekse polynomet $P(z) = z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.

a) Polynomet har én heltallig, reell rot. Finn denne.
b) Finn alle de komplekse røttene til polynomet, og illustrer på en figur hvordan de ligger plassert i det komplekse planet.
c) Finn reell faktorisering av polynomet.

Oppgave 3

Kaptein Sabeltann har funnet et kart som forteller om en skatt begravd ved vraket av skuta Saragossa. Skuta ble bygd i året 1728. Kartet sier:

> *Skatten er begravd rett nordover fra skutas baug. For å finne den, må du vise at du kan både telle og regne. Begynn med å telle trinnene i stigen opp til utkikkstønna på skuta. Opphøy så dette tallet i tredje potens, multipliser med 3, legg til året skuta ble bygd, og del på fire. Til slutt tar du kubikkroten. Da finner du det første hemmelige tallet. Det neste hemmelige tallet finner du ved å gjøre det samme med det første hemmelige tallet som du nettopp gjorde med antallet trinn i stigen. Deretter finner du de tredje hemmelige tallet ved å starte med det andre. Og så videre. Holder du på slik lenge nok, vil de hemmelige tallene etter hvert fortelle deg hvor mange skritt du må gå nordover fra skutas baug for å komme til skatten.*

Sjørøverne finner vraket, men stigen er borte! Kapteinen blir rasende, men byssegutten Pinky har tatt brevkurset *Mat1100 for sjørøvere* og klarer likevel å regne ut hvor skatten må ligge begravd.

a) Forklar at hvis x_n er hemmelig tall nummer n, der vi kan la x_0 være antall trinn i stigen, så gjelder for alle hele tall $n \geq 0$:

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{432 + \frac{3}{4} x_n^3}$$

Anta at følgen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergerer. Finn tallet L den i så fall konvergerer mot.

b) Anta at antall trinn i stigen er større enn L. Vis at følgen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ da er avtakende og nedad begrenset av L.
c) Anta så at antall trinn er mindre enn L. Vis at da er følgen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ voksende og oppad begrenset av L. Hva skjer med følgen hvis antall trinn i stigen var lik L?
d) Vis at følgen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergerer mot L, uansett hvor mange trinn stigen hadde. Hvor mange skritt nordover fra skuta må man gå for å komme til skatten?

Oppgave 4

La $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være en kontinuerlig funksjon som er deriverbar for alle $x \neq 0$, og la $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være definert ved

$$g(x) = x \cdot f(x).$$

Vis at g er deriverbar for alle $x \in \mathbf{R}$, og at

$$g'(0) = f(0).$$

Lykke til!